

ARCHIV FÜR ELEKTROTECHNIK

IM EINVERNEHMEN MIT DEM VERBAND DEUTSCHER ELEKTROTECHNIKER e. V. (VDE)

HERAUSGEGEBEN VON

J. FISCHER UND W. NÜRNBERG

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

44. BAND

1959

FÜNFTES HEFT

Inhaltsverzeichnis

	Seite
FR. STIER: Die stationäre, radiale Wärmeströmung in einem Hohlzylinder für beliebige Grenzbedingungen. Mit 3 Textabbildungen	271
H. TEICHMANN: Das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges und die Möglichkeiten seiner Anwendungen auf elektrotechnische Probleme	275
P. NENNING: Drehspul- und Drehmagnet-Galvanometer, Optimal-Bedingungen und Gütefaktoren. Mit 2 Textabbildungen	279
A. K. GOSWAMI: Leistungsbilanz und statische Stabilität der einphasigen elektrischen Welle. Mit 13 Textabbildungen	297
W. HELD und K. WENZEL: Die Stromverdrängung in Rohren und Koaxialleitern. Mit 8 Textabbildungen	306
O. LOH: Eine Theorie des Wechselstromkreises mit Lichtbogen (II. Teil) Mit 5 Textabbildungen	318
Berichtigung	330

Symmetrische Komponenten in Drehstromsystemen

Von Dr. techn. AUGUST HOCHRAINER, Direktor des Hochspannungsinstitutes und der Hochspannungsschaltgerätefabrik der AEG, Kassel.

Mit 346 Abbildungen. XI, 364 Seiten Gr.-8°. 1957.

Ganzleinen DM 45,—

Aus den Besprechungen:

„... Das Buch wird mit einer Reihe von für die Anwendung des Buches als Lehrbuch ausgezeichneten Abschnitten über die rein theoretischen und grundlegenden Verhältnisse für Wechselstromkreislauf sowie mit der Grundlage für die Methode der symmetrischen Komponenten selbst eingeleitet, die längst eine so weite Anwendung bei der Berechnung von Fehlern (Kurzschluß) im Wechselstromnetz gefunden hat. Nach ein paar Abschnitten, die besonders den Kurzschlußproblemen gewidmet sind, beleuchtet der Verfasser in einer Reihe größerer Kapitel die Anwendung der Methode bei der Berechnung der symmetrischen Impedanz für Transformatoren, Induktionsmaschinen, Luftleitungen und Kabeln. Bei der Behandlung von Doppelfehlern und Analogien hierzu in einem Netzmodell wendet der Verfasser eine Achtpol-Darstellung an, wobei Matrix und Tensor benutzt wird. Für Diagonal-Komponenten ($\alpha - \beta - 0$) wird eine analoge Methode angewendet. Die Transformation erlaubt außerdem die Anwendung der symmetrischen Komponenten und Diagonal-Komponenten bei Behandlung von Ausgleichsphänomenen im Wechselstromnetz, hierunter Wanderwellen, wobei auch unter Anwendung der Laplace-Transformation der Kopplungsverlauf berechnet werden kann. Die Darstellung des Verfassers ist klar, leicht faßlich. Die Prägung des Stoffes zeigt, daß er für Studierende zurechtgelegt ist, aber die Einführung in das Gebiet ist so weitgehend und detailliert, daß das Buch unzweifelhaft vielen Elektroingenieuren etwas zu sagen haben wird.“

Ingenieuren

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Das

Archiv für Elektrotechnik

erscheint nach Maßgabe der eingehenden Arbeiten zwanglos in einzeln berechneten Heften.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im Archiv für Elektrotechnik erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch und wissenschaftlicher Veröffentlichungen“ hingewiesen (Geschäftsstelle Berlin W 15, Uhlandstr. 175), ebenso auf die Normblätter DIN 1304, Allgemeine Formelzeichen, und DIN 1302, Mathematische Zeichen. Es wird gebeten, an den Anfang jeder Abhandlung eine Übersicht zu stellen, am Ende eine Zusammenfassung zu geben. Die Übersicht soll den eiligen Leser über die Einteilung (den Gedankengang), die Zusammenfassung über die wesentlichen Ergebnisse der Arbeit unterrichten. Am Schluß jedes Manuskriptes ist die vollständige Anschrift des Verfassers anzugeben. Im Manuskript sind griechische Buchstaben rot, Frakturbuchstaben blau, geradstehende Buchstaben gelb zu unterstreichen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung, notfalls auch die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Von jeder Arbeit werden zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich geliefert.

Manuskripte sind zu senden:

Für die Gebiete: Grundlagen, Theorie, Meßtechnik, Schwachstromtechnik usw. an: Prof. Dr.-Ing. JOHANNES FISCHER, (17a) Karlsruhe i. Baden, Schirmerstraße 6.

Für die Gebiete: Starkstromtechnik, Energieübertragung, Hochspannungstechnik usw. an: Prof. Dr.-Ing. WERNER NÜRNBERG, (1) Berlin-Charlottenburg 2, Technische Universität.

Manuskripte, die bei dem unterzeichneten Verlag in Berlin oder Heidelberg eingehen, wird dieser sofort dem zuständigen Herausgeber übermitteln.

SPRINGER-VERLAG

Berlin-Wilmersdorf

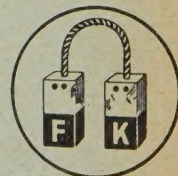
Heidelberg

Heidelberger Platz 3, Fernspr.: Sammel-Nr. 830301.

Neuenheimer Landstraße 28—30, Fernspr. 27901—4

**KONTAKTTEILE**

in allen Ausführungen
für höchste
Beanspruchung



KONTAKT-KOHLN KEVER • KÖLN • POSTFACH 231

AUSLIEFERUNGLAGER HONNEF (RHEIN) • TEL:SA-NR.2214 • FERNSCHREIBER 088 6792

Die stationäre, radiale Wärmeströmung in einem Hohlzylinder für beliebige Grenzbedingungen

Von

FR. STIER, Karlsruhe

Mit 3 Textabbildungen

(Eingegangen am 3. März 1959)

Einleitung

Die Behandlung der stationären, eindimensionalen Wärmeströmung erfolgt meist für bestimmte Grenzbedingungen z. B. bezüglich der Temperatur der Grenzflächen, der Kühlung dieser Grenzflächen durch das umgebende Kühlmedium oder der Wärmeisolation derselben. Diese Grenzbedingungen ermöglichen eine eindeutige Lösung, aber eben nur eine Lösung für den speziellen durch die Grenzbedingungen gegebenen Fall. Oft hat man aber das Bedürfnis, eine Übersicht über die Temperaturverteilung bei den möglichen Wärmeströmungen zu bekommen, besonders dann, wenn die Grenzbedingungen nicht eindeutig angegeben werden können. Hier wird nun versucht, eine solche Übersicht dadurch zu bekommen, daß die stationäre, eindimensionale Wärmeströmung eines Hohlzylinders, in dessen Innern Verluste entstehen, ganz allgemein betrachtet wird und als unabhängige Variable der Wärmestrom durch eine der beiden begrenzenden Zylindermantelflächen gewählt wird.

Die stationäre Wärmeleitungsgleichung für Zylinder, wenn wir axiale und radiale Symmetrie voraussetzen ($\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{\partial \vartheta}{\partial \varphi} = 0$), lautet bei konstanter Wärmeleitfähigkeit:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)}{\partial r} = - \frac{q}{\lambda}. \quad (1)$$

Wir betrachten einen Hohlraumzylinder und stellen uns die beiden begrenzenden Zylindermantelflächen als zwei Elektroden vor, zwischen denen sich ein homogenes Dielektrikum befindet. Dann ändert sich die elektrische Feldstärke etwa umgekehrt proportional mit dem Radius und wir erhalten für den dielektrischen Verlust pro Volumeneinheit, wenn wir die Abhängigkeit desselben von der Temperatur außer Acht lassen:

$$q = q_1 \frac{r_1^2}{r^2}. \quad (2)$$

Dann wird der Temperaturverlauf durch die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \left(r \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \right)}{\partial r} = - \frac{q_1}{\lambda} \cdot \frac{r_1^2}{r} \quad (3)$$

beschrieben, wobei λ die Wärmeleitfähigkeit des Dielektrikums ist.

Durch Integration erhalten wir folgende Gleichungen für die Wärmestromdichte w und die Temperatur ϑ :

$$w = - \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial r} = + q_1 r_1^2 \frac{\ln C_1 r}{r}, \quad (4)$$

$$\vartheta = - \frac{q_1 r_1^2}{\lambda} \frac{1}{2} (\ln C_1 r)^2 + C_2. \quad (5)$$

Der gesamte Wärmestrom tritt teilweise durch die innere und teilweise durch die äußere Zylindermantelfläche. Der von innen nach außen gerichtete Wärmestrom sei positiv; dann erhalten wir zwischen der im Innern des Hohlzylinders entstehenden Verlustleistung N_i und dem Wärmestrom durch die beiden Grenzflächen, die durch die beiden Radien r_1 und r_2 gekennzeichnet sind:

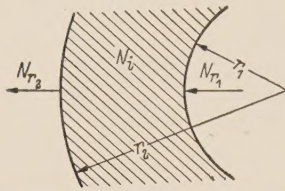


Bild 1. Positive Richtung des Wärmestroms.

$$N_i = N_{r_2} - N_{r_1}. \quad (6)$$

Die gesamte im Hohlzylinder mit dem Innenradius r_1 und dem Außenradius r_2 auftretende Verlustwärme beträgt für die Zylinderlänge l :

$$N_i = \int_{r_1}^{r_2} q_1 \frac{r_1^2}{r^2} 2\pi r l dr = q_1 r_1^2 2\pi l \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (7)$$

Der über die äußere Zylindermantelfläche (Radius r_2) abgeführte Wärmestrom ergibt sich mit Hilfe der Gl. (4):

$$N_{r_2} = q_1 r_1^2 2\pi l \ln C_1 r_2. \quad (8)$$

Allgemein erhalten wir für den Wärmestrom durch eine Zylinderfläche im Innern, die durch den Radius r gekennzeichnet ist

$$N_r = q_1 r_1^2 2\pi l \ln C_1 r. \quad (9)$$

Durch diejenige Zylinderfläche im Innern oder am Mantel des Hohlzylinders (r_m), in der die höchste Temperatur ϑ_m herrscht, tritt nach Gl. (4) kein Wärmestrom hindurch. Es ist also:

$$N_{r_m} = q_1 r_1^2 2\pi l \ln C_1 r_m = 0. \quad (10)$$

Damit ist die Konstante $C_1 = \frac{1}{r_m}$ bestimmt. Wenn wir noch den Wärmestrom auf die innere Verlustleistung [Gl. (7)] beziehen, erhalten wir jetzt allgemein:

$$\frac{N_r}{N_i} = \frac{\ln \frac{r}{r_m}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (11)$$

und für die beiden Grenzflächen:

$$\frac{N_{r_2}}{N_i} = \frac{\ln \frac{r_2}{r_m}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \beta, \quad (12)$$

$$\frac{N_{r_1}}{N_i} = \frac{\ln \frac{r_1}{r_m}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \beta - 1. \quad (13)$$

Die verschiedenen Zustände der stationären Wärmeströmung eines beidseitig gekühlten Hohlzylinders, die von den Grenzflächentemperaturen ϑ_1 und ϑ_2 bzw. von den Temperaturen und der Strömungsgeschwindigkeit des umgebenden Kühlmediums abhängen, können übersichtlich in Abhängigkeit von dem durch die Zylindermantelfläche mit dem Radius r_1 bzw. r_2 abfließenden Wärmestrom dargestellt werden. Wir beziehen uns im folgenden auf den durch die Außenmantelfläche des Zylinders fließenden Wärmestrom N_{r_2} und führen das Verhältnis N_{r_2}/N_i [Gl. (12)] als Parameter ein. Als Vergleichstemperatur wählen wir:

$$\vartheta_0 = \frac{N_i}{2\pi l \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (14)$$

d. i. eine Temperaturdifferenz, die zwischen den begrenzenden Zylinderflächen dann auftreten würde, wenn im Hohlzylinder gleichen Materials selbst keine Verluste auftreten und der ganze

Wärmestrom N_i durch den Hohlzylinder z. B. von innen nach außen radial symmetrisch hindurchtritt. Mit dieser Vergleichstemperatur erhalten wir aus Gl. (5) nach einfachen Umformungen

$$\frac{\vartheta - \vartheta_2}{\vartheta_0} = \frac{1}{2} \frac{\ln \frac{r_2}{r_m} \cdot \ln \frac{r_2}{r}}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)^2} = \beta \frac{\ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right)^2, \quad (15)$$

$$\frac{\vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_0} = \frac{1}{2} \frac{\ln \frac{r_1 r_2}{r_m^2}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} = \beta - \frac{1}{2}, \quad (16)$$

$$\frac{\vartheta_m - \vartheta_2}{\vartheta_0} = \frac{1}{2} \frac{\left(\ln \frac{r_2}{r_m}\right)^2}{\left(\ln \frac{r_2}{r_1}\right)^2} = \frac{1}{2} \beta^2. \quad (17)$$

Den Radius r_m der Zylinderfläche, in der die höchste Temperatur herrscht, erhalten wir aus der Gl. (12):

$$\frac{r_m}{r_2} = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^\beta. \quad (18)$$

Bild 2 zeigt die Temperaturdifferenz zwischen den Grenzflächen und die Differenz zwischen maximaler Temperatur und der Temperatur der Grenzfläche (r_2) in Abhängigkeit vom Verhältnis des Wärmestromes durch diese Grenzfläche zu den Gesamtinnenverlusten $\beta = N_{r_2}/N_i$. Wenn keine äußeren Wärmestromquellen vorhanden sind, bleibt β innerhalb des Bereiches $0 \leq \beta \leq 1$.

Hierbei unterscheiden wir folgende Sonderfälle:

I. $\beta = 0$ bzw. $\beta = 1$: Die Zylindermantelfläche r_2 bzw. r_1 ist völlig wärmeisoliert. Der gesamte Wärmestrom strömt über die Zylindermantelfläche r_1 bzw. r_2 ab. Dies ist der Fall der einseitigen radialen Wärmeströmung nach innen bzw. außen. Die maximale Übertemperatur tritt an der wärmeisolierten Zylindermantelfläche auf.

II. $\beta = 0,5$: Über die Zylindermantelflächen r_1 und r_2 fließt je die Hälfte der gesamten Verlustleistung ab. Die Grenzflächentemperaturen sind gleich groß: $\vartheta_1 = \vartheta_2$. Die maximale Übertemperatur entsteht in der Zylinderfläche mit dem Radius $r_m = \sqrt{r_1 r_2}$ und beträgt unter sonst gleichen Verhältnissen nur 25% der Übertemperatur bei einseitiger Wärmeströmung. Dies ist der Fall der symmetrischen zweiseitigen radialen Wärmeströmung.

Das Diagramm umfaßt aber auch alle Zwischenfälle. Es ist interessant festzustellen, daß bei unvollkommener Wärmeisolierung, wenn nur 10% der gesamten inneren Verlustleistung (N_i) durch die unvollkommen isolierte Mantelfläche abgeführt werden, die Temperaturdifferenz zwischen den Grenzflächen bereits um 20% sinkt. Die graphische Darstellung kann aber auch für Werte

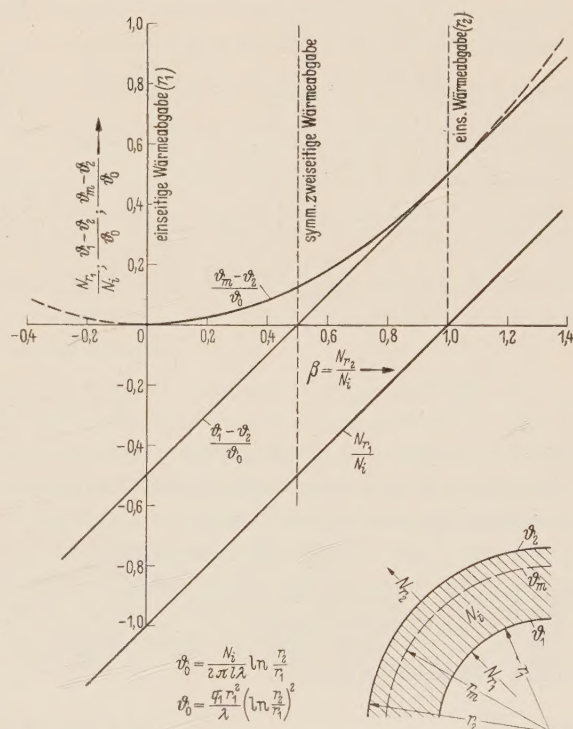


Bild 2 Rel. Temperaturdifferenz in Abhängigkeit von dem auf die innere Verlustleistung (N_i) bezogenen Wärmestrom durch die äußere Zylindermantelfläche (N_{r_2}).

$\beta > 1$ und $\beta < 0$ erweitert werden. In diesen Bereich kommen wir, wenn entweder innen ($\beta > 1$) oder außen ($\beta < 0$) Wärmequellen vorhanden sind.

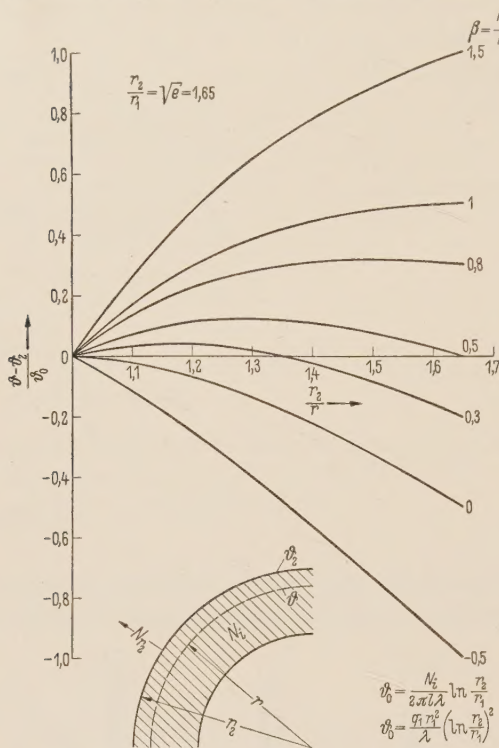


Bild 3. Rel. Temperaturdifferenz $(\theta - \theta_0)/\theta_0$ in Abhängigkeit von r_2/r_1 . Parameter ist der Anteil der durch die äußere Zylinder-Mantelfläche abgeführten Verluste (N_{r_2}/N_i) .

Ist $\beta > 1$, dann befindet sich eine Wärmequelle in dem vom Hohlzylinder umschlossenen Innenraum ($r < r_1$), ein positiver Wärmestrom $N_a = (\beta - 1) N_i$ tritt von innen nach außen durch den Zylinder hindurch.

Ist $\beta < 0$, dann befindet sich eine zusätzliche Wärmequelle im Außenraum ($r > r_2$), ein negativer Wärmestrom $N_a = \beta \cdot N_i$ tritt von außen nach innen durch den Zylinder hindurch.

Aus dem Diagramm können für diese β -Werte ohne weiteres die Grenzflächentemperaturen entnommen werden. In der Darstellung ist außerdem der Wärmestrom durch die Grenzfläche r_1 dargestellt. Man erkennt, daß erst für Werte $\beta > 1$ beide Anteile positiv und für $\beta < 0$ beide negativ werden, so daß die Summe

$$N_{r_1} + N_{r_2} = (2\beta - 1) N_i \quad (19)$$

die im Innern auftretenden Verluste übersteigt, weil sich außerhalb der Begrenzungsflächen des Hohlzylinders weitere Wärmequellen befinden.

Bild 3 zeigt den Verlauf der Übertemperatur über dem Radius nach Gl. (15) für ein Verhältnis der Radien der Begrenzungsflächen von $r_2/r_1 = \sqrt{e} = 1,65$ mit $\beta = \frac{N_{r_2}}{N_i}$ als Parameter. Es sei noch darauf hingewiesen, daß sich auch hier-

für eine allgemeine Darstellung ergibt, wenn man die relative Temperaturdifferenz $\frac{\theta - \theta_2}{\theta_0}$ in Funktion von $x = \frac{\ln r_2/r}{\ln r_2/r_1}$ mit β als Parameter aufzeichnet.

Zusammenfassung

Die Darstellung der gesuchten Temperaturdifferenzen in Abhängigkeit von dem auf die gesamte Verlustleistung bezogenen Wärmestrom durch eine der begrenzenden Zylindermantelflächen erweist sich als fruchtbar. Von diesem relativen Wärmestrom ist die Differenz der Temperaturen der den Hohlzylinder begrenzenden Mantelflächen geradlinig und die Differenz zwischen der maximalen Temperatur und der Temperatur der Bezugsgrenzfläche quadratisch abhängig. Eine übersichtliche graphische Darstellung erfaßt alle möglichen Zustände und berücksichtigt auch den Einfluß der außerhalb der Begrenzungsflächen des Hohlzylinders liegenden Wärmequellen auf den Temperaturverlauf. Abweichungen der Temperaturdifferenzen von den Werten für die ideale einseitige Wärmeabgabe infolge unvollkommener Wärmeisolierung können leicht abgeschätzt werden.

Das Gaußsche Prinzip des kleinsten Zwanges und die Möglichkeiten seiner Anwendungen auf elektrotechnische Probleme*

Von

HORST TEICHMANN, Nürnberg

(Eingegangen am 18. Februar 1959)

Die Anwendung von Denkschemata, die sich in der analytischen Mechanik bewährten, auf elektrotechnische Probleme hat, wie u. a. M. ABRAHAM und A. FÖPPL [1] gezeigt haben, zu neuen wertvollen Einsichten in die physikalischen Zusammenhänge der elektromagnetischen Vorgänge geführt.

Die Übertragung der mathematischen Beziehungen der Mechanik wird durch die Einführung von verallgemeinerten Kräften und Koordinaten ermöglicht, die sich auf die Äquivalenz der verschiedenen Energieformen stützt, wobei in der Regel die verallgemeinerte Koordinate die unabhängige Veränderliche ist. Von den verallgemeinerten Kräften und Koordinaten wird nämlich lediglich verlangt, daß ihr Produkt stets einer Energie (Arbeit) gleich ist, d. h. daß gilt:

$$\Delta E = \Delta A = K \Delta s = Q \Delta q, \quad (1)$$

wobei ΔA die Arbeit, ΔE die Energie, K die mechanische Kraft, Δs den Weg (Koordinate), Q die verallgemeinerte Kraft, Δq die verallgemeinerte Koordinate bedeuten. Nach A. FÖPPL [1] empfiehlt es sich, für die Anwendung auf elektrotechnische Vorgänge als verallgemeinerte Kraft Q die elektrische Spannung bzw. die elektromotorische Kraft (EMK) U , als verallgemeinerte Koordinate q die elektrische Ladung zu wählen. Dann ist insbesondere $\dot{q} = \frac{dq}{dt} = i$ der elektrische Strom und $\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt}$ die Stromänderung.

Wir werden uns daher vorteilhafterweise bei der Ableitung des Prinzips des kleinsten Zwanges aus dem bekannten mechanischen Gleichgewichtsprinzip der virtuellen Verrückungen der Schreibweise in verallgemeinerten Kräften und Koordinaten bedienen.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen sagt aus, daß bei virtuellen Verrückungen der unabhängigen Veränderlichen δq_v die vorhandenen Kräfte Q_v keine Arbeit (δA) leisten, wenn sich das betrachtete System im statischen Gleichgewicht befindet:

$$\delta A = \sum Q_v \delta q_v = 0. \quad (2)$$

Das Gleichgewicht ist stabil für $\delta^2 A < 0$, labil für $\delta^2 A > 0$ und indifferent für $\delta^2 A = 0$. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen gibt bereits einen Hinweis, daß von der Übertragung derartiger Denkschemata auf elektrotechnische Vorgänge neue Einsichten in die physikalischen Bedingungen der Stabilität elektromagnetischer Vorgänge zu erwarten sind.

Vorerst ist jedoch das statische Prinzip auf dynamische Vorgänge auszudehnen. Dies gelang LAGRANGE auf Grund der D'ALEMBERTSchen Erkenntnis, daß der Trägheitswiderstand, d. h. die Reaktionskraft, der eingprägten (Aktions-) Kraft gleichwertig zur Seite zu stellen ist. Dann gilt für jeden Zeitpunkt:

$$\sum_v (Q_v - \mu_v \ddot{q}_v) \delta q_v = 0, \quad (3)$$

mit μ_v als verallgemeinerter Masse, im Falle der oben angegebenen Wahl ($Q_v = U_v$; $\ddot{q}_v = \frac{di_v}{dt}$) ist $\mu_v = L_v$ (Selbstinduktionskoeffizient). Gl. (3) gehört als D'ALEMBERTSches Prinzip zu den Grundlagen der analytischen Mechanik.

* Vortrag im Elektrotechnischen Kolloquium der Techn. Hochschule Stuttgart, gehalten am 20. 1. 1959.

Durch zweimalige Differentiation nach der Zeit $\left(\frac{d^2}{dt^2}\right)$ kann man aus dem D'ALEMBERTSchen Prinzip (3) das Prinzip des kleinsten Zwanges gewinnen:

$$\sum_v (Q_v - \mu_v \ddot{q}_v) \delta \ddot{q}_v + 2 \sum_v (Q_v - \mu_v \ddot{q}_v)' \delta \dot{q}_v + \sum_v (Q_v - \mu_v \ddot{q}_v)'' \delta q_v = 0. \quad (4)$$

Setzen wir mit C. F. GAUSS [2] fest, daß nur die zweiten Ableitungen der verallgemeinerten Koordinaten kleine Änderungen erfahren dürfen, daß also gilt (GAUSS'sche Variation):

$$\delta \ddot{q}_v \neq 0; \quad \delta \dot{q}_v = 0; \quad \delta q_v = 0, \quad (5)$$

so folgt

$$\sum_v (Q_v - \mu_v \ddot{q}_v) \delta \ddot{q}_v = 0, \quad (6)$$

als äquivalent mit dem D'ALEMBERTSchen Prinzip (3). Das GAUSS'sche Prinzip (6) kann man auch aus der Größe $Z = \sum_v \frac{1}{\mu_v} (Q_v - \mu_v \ddot{q}_v)^2$ durch Bildung der GAUSS'schen Variation (5) gewinnen:

$$\delta Z = \left. \begin{aligned} \sum_v \frac{2}{\mu_v} (Q_v - \mu_v \ddot{q}_v) \delta \ddot{q}_v &= 0, \\ \sum_v (Q_v - \mu_v \ddot{q}_v) \delta \ddot{q}_v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Die Größe Z bezeichnet GAUSS als Zwang und sagt von ihr in der oben zitierten Arbeit [2]: „Es ist merkwürdig, daß die freien Bewegungen, wenn sie mit den notwendigen Bedingungen nicht bestehen können, von der Natur auf dieselbe Art modifiziert werden, wie der rechnende Mathematiker nach der Methode der kleinsten Quadrate Erfahrungen ausgleicht, die sich auf untereinander durch notwendige Abhängigkeiten verknüpfte Größen beziehen.“ Denn der Zwang ist stets ein Minimum, weil $\delta^2 Z > 0$ ist, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\delta^2 Z = \sum_v \frac{2}{\mu_v} (Q_v - \mu_v \ddot{q}_v) \delta^2 \ddot{q}_v + 2 (\delta \ddot{q}_v)^2. \quad (8)$$

Das erste Glied verschwindet wegen $\delta^2 \ddot{q} \neq 0$ und (6), das zweite ist als Quadrat eine positiv definite Größe.

Aus der Ableitung des GAUSS'schen Prinzips des kleinsten Zwanges folgt, daß seine Dimension sich von der der Arbeit um die zweite Potenz der Zeit unterscheidet. Es ist daher:

$$[Z] = \left[\frac{A}{t^2} \right] = \left[\frac{E}{t^2} \right] = \left[\frac{N}{t} \right] = [\mu \ddot{q}^2] = [Q \ddot{q}] \quad (9)$$

mit t der Zeit und N der Leistung. Insbesondere gilt in Verbindung mit (7) unter Beachtung, daß bei der Bildung von δZ stets die unabhängige Veränderliche der GAUSS'schen Variation (5) unterworfen wird:

$$\delta Z = \delta \left(\frac{dN}{dt} \right) = 0; \quad Z = \sum_v \frac{\partial N}{\partial \ddot{q}_v} \ddot{q}_v \quad \text{bzw.} \quad Z = \sum_v \frac{\partial N}{\partial Q_v} \dot{Q}_v, \quad (10)$$

je nachdem, welche der beiden generalisierten Größen im gegebenen Falle aus physikalischen Gründen als unabhängige Veränderliche zu betrachten ist.

Die Gleichung (10) sagt aus, daß jeder Vorgang so verläuft, daß die zeitliche Änderung der Leistung ein Minimum ist. Sie erlaubt unter Verwendung generalisierter Kräfte und Koordinaten in besonders geeigneter Weise das GAUSS'sche Prinzip des kleinsten Zwanges auf Fragestellungen der Elektrotechnik anzuwenden.

Zuvor sei jedoch noch auf eine andere Möglichkeit hingewiesen, aus (7) eine allgemeine und ebenfalls praktisch gut brauchbare Beziehung abzuleiten:

$$\left. \begin{aligned} \sum_v Q_v \delta \ddot{q}_v &= \sum_v \mu_v \ddot{q}_v \delta \ddot{q}_v, \\ \sum_v \mu_v \ddot{q}_v \delta \ddot{q}_v &= \sum_v \frac{\partial}{\partial \ddot{q}_v} \left(\frac{1}{2} \mu_v \ddot{q}_v^2 \right), \\ T_z &= \frac{1}{2} \mu_v \ddot{q}_v^2, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

oder:

$$Q_v = \frac{\partial T_z}{\partial \ddot{q}_v}. \quad (12)$$

Das Ergebnis sind die GIBBS- [3] APPELLSchen [4] Gleichungen. Die Größe T_z besitzt die Dimension des Zwanges [vgl. Gl. (9)] und kann mit der kinetischen Energie verglichen werden (anstelle des Quadrats der ersten Ableitung der Koordinaten, steht das ihrer zweiten Ableitung); T_z stellt gewissermaßen den durch die verallgemeinerte Reaktionskraft bewirkten Widerstandszwang gegenüber den eingepägten der äußeren Kräfte dar.

An drei Beispielen soll im folgenden gezeigt werden, wie sich auf Grund der Beziehungen (10) und (12) das GAUSS'sche Prinzip des kleinsten Zwanges auf elektrotechnische Problemstellungen anwenden läßt:

1. Zunächst sei ein einfacher aus L und C bestehender Schwingungskreis behandelt. Für ihn gilt, generalisiert geschrieben:

$$E_{elm} = \frac{1}{2} \left(L \dot{q}^2 + \frac{q^2}{C} \right) = \text{const.}, \quad (13)$$

d. h. der Energiesatz für die elektromagnetische Energie E_{elm} . Daraus folgt für die Leistung:

$$N = L \dot{q} \ddot{q} + \frac{1}{C} \dot{q} q = 0 \quad (14)$$

und wegen $N = 0$ auch $\frac{dN}{dt} = Z = 0$ bzw. $\delta Z = 0$, d. h. die Erfüllung des GAUSS'schen Prinzips.

Aus (14) folgt die bekannte Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{q}{LC} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{i}{LC}, \quad (15)$$

nach nochmaliger Differentiation nach der Zeit.

2. Das gleiche Ergebnis gewinnen wir auch mit Hilfe der GIBBS-APPELLSchen Gleichungen. Für T_z ergibt sich nach (11) und dem oben über die Bedeutung der verallgemeinerten Kräfte und Koordinaten Ausgeführten:

$$T_z = \frac{1}{2} L \left(-\frac{di}{dt} \right)^2. \quad (16)$$

Dabei ist das negative Vorzeichen vor $\ddot{q} = \frac{di}{dt}$ zu setzen, weil der Reaktionszwang durch das Auftreten einer Gegen-EMK hervorgerufen wird. Es ergibt sich für $Q = U$:

$$U = -L \frac{di}{dt}. \quad (17)$$

Setzen wir $U = \frac{q}{C}$, so folgen wie unter 1. die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = -\frac{q}{LC} \quad \text{und} \quad \frac{d^2 i}{dt^2} = -\frac{i}{LC}. \quad (18)$$

3. Aus der Beziehung $N = U \cdot i$ lassen sich zwei Ausdrücke für den Zwang gewinnen, die Kriterien für den Ablauf elektrischer Vorgänge liefern, die sich in Kreisen mit parallel oder in

Reihe geschalteten Schaltelementen abspielen, welche verschiedene Kennlinien besitzen. Von Wichtigkeit ist dort zu wissen, welchem Kennlinienverlauf der Vorgang vom Schnittpunkt zweier Kennlinien aus folgen wird. Aus dem Ausdruck für die Leistung N folgt nach (10) für den Zwang Z :

$$Z = \frac{dN}{dt} = i \frac{dU}{dt} + U \frac{di}{dt} = \left(i \frac{dU}{di} + U \right) \frac{di}{dt} \quad \text{bzw.} \quad Z = \left(U \frac{di}{dU} + i \right) \frac{dU}{dt}, \quad (19)$$

wobei für die Reihenschaltung aus physikalischen Gründen $\frac{di}{dt}$, für die Parallelschaltung U als die unabhängige Veränderliche (verallgemeinerte Koordinate) anzusehen ist.

Für den Schnittpunkt S zweier Kennlinien haben i , U , $\frac{di}{dt}$ bzw. U , i , $\frac{dU}{dt}$ für einen bestimmten Zeitpunkt t den gleichen Wert. Es gilt daher für den Zwang $Z_{R(S,t)}$ bei Reihenschaltung:

$$Z_{R(S,t)} = a_R \frac{dU}{di} + b_R \quad (20a)$$

und für den Zwang $Z_{P(S,t)}$ bei Parallelschaltung:

$$Z_{P(S,t)} = a_P \frac{di}{dU} + b_P. \quad (20b)$$

Der Unterschied ΔZ_R des Zwanges für zwei sich schneidende Kennlinien im Schnittpunkt ist daher proportional der Differenz der Steilheiten der Kennlinien:

$$\Delta Z_R = a_R \left\{ \left(\frac{dU}{di} \right)_I - \left(\frac{dU}{di} \right)_{II} \right\}. \quad (21a)$$

Entsprechend gilt für ΔZ_P :

$$\Delta Z_P = a_P \left\{ \left(\frac{di}{dU} \right)_I - \left(\frac{di}{dU} \right)_{II} \right\}. \quad (21b)$$

In der Kennliniendarstellung mit U als Abszisse und i als Ordinate ist der Zwangunterschied (ΔZ_R) bei Reihenschaltung proportional dem Widerstandsunterschied, derjenige (ΔZ_P) bei Parallelschaltung proportional dem Leitfähigkeitsunterschied. In beiden Fällen wird der Zustand eintreten, für den:

$$\Delta Z_{R,P} < 0. \quad (22)$$

Denn nach dem Prinzip des kleinsten Zwanges verlaufen die Vorgänge stets so, daß der Zwang einen minimalen Wert annimmt. Der neue Zustand wird bei veränderlichem U und i stets mit einem Minimum an Leistungsänderung (vgl. Gl. (10)) erreicht.

Auf diese Weise lassen sich z. B. Vorgänge mit **S**-(Gasentladung) und **N**-(Dynatron)-Kennlinien, wie sie K. W. WAGNER [3] beschreibt, aus einheitlicher Sicht einfach und anschaulich unter Berücksichtigung von (22) in ihrem Verlauf überblicken.

Zweifelloos verspricht das Prinzip des kleinsten Zwanges besonders auch für Stabilitätsbetrachtungen neue Einsichten. Hierüber laufen gegenwärtig noch Untersuchungen, die Gegenstand einer späteren Veröffentlichung sein sollen.

Literatur

- [1] ABRAHAM, M., u. A. FÖPPL: Theorie der Elektrizität, Band I, 3. Aufl. (insbes. S. 244 ff.) Leipzig: B. G. Teubner, 1923. — [2] GAUSS, C. F.: Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. Crelles J. f. reine u. angew. Mathem. Bd. 4 (1829) S. 232. — BOLTZMANN, L.: Vorlesungen über die Prinzipie der Mechanik, Band I. Leipzig: J. A. Barth 1922. — [3] WAGNER, K. W.: Einführung in die Lehre von den Schwingungen und Wellen. 2. Aufl. Wiesbaden: Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung 1947 (Photomech. Nachdruck). — [4] GIBBS, J. W.: On the fundamental formulae of Dynamics. Americ. J. Mathem. Bd. 2 (1879) S. 49. — APPELL, P.: Sur une forme générale des équations de la dynamique. C. R. Bd. 129 (1899) S. 317.

Prof. Dr.-Ing. H. TEICHMANN, Nürnberg, Lützowstr. 3

Drehpul- und Drehmagnet-Galvanometer, Optimal-Bedingungen und Gütefaktoren

Von

PETER NENNING, Stuttgart

Mit 2 Textabbildungen

(Eingegangen am 25. Februar 1959)

1. Leistungs-Empfindlichkeit des Drehpul-Galvanometers

Zur Messung von sehr schwachen physikalischen Wirkungen, die sich als elektrische Spannung (EMK) äußern, bedient man sich auch heute noch hochempfindlicher Galvanometer ohne elektronische Verstärker. Solche physikalischen Wirkungen sind z. B. Thermospannungen bei der Messung von Temperaturen und der Energie von elektromagnetischen Strahlungen im Gebiet des sichtbaren, des ultravioletten und des infraroten Lichts, der Wärmestrahlung. Mit modernen hochempfindlichen Galvanometern kommt man ohne weiteres an die Grenze der Empfindlichkeit von Meßinstrumenten, die diesen durch die Wärmebewegung ihrer beweglichen Systeme (BROWN-sche Molekularbewegung) schließlich gesetzt ist [13, 14]. Diese Grenze kann auch mit Hilfe moderner elektronischer Verstärker nicht unterschritten werden.

Das am besten geeignete Galvanometer für solche Messungen wird dasjenige sein, das für eine bestimmte im Meßstromkreis verbrauchte Leistung den größten Ausschlag auf der Skale liefert: Bleiben wird beim Beispiel der Messung von Strahlungsenergie mit Hilfe von Thermoelementen, so vergegenwärtige man sich, daß bei Erwärmen der einen Lötstelle zwar eine bestimmte EMK auftritt (SEEBECK-Effekt), daß aber der fließende Strom wegen des PELTIER-Effekts diese EMK wieder herabsetzt. Die im Meßstromkreis verbrauchte elektrische Leistung ist proportional der ihm zugeführten Leistung durch die zu messende Strahlung.

Die Leistungsempfindlichkeit eines Drehpulg galvanometers mit Spiegel-Ablesung — sie ist gleichzeitig identisch mit der Wurzel aus dem Produkt der Strom- und Spannungs-Empfindlichkeit desselben Instruments — kann man auf einen geschlossenen Ausdruck ableiten, in dem folgende hauptsächlich interessierenden Größen stehen:

Die Dauer T einer vollen Schwingung des ungedämpften beweglichen Systems, das Trägheitsmoment des Spiegels Θ_s (seine Größe bestimmt den längsten erlaubten Lichtzeiger), das Verhältnis

$$v = \frac{\Theta_k}{\Theta_s} \quad (1)$$

der Trägheitsmomente des Leitermaterials der Drehspule Θ_k zu dem des Spiegels (plus Isolation und Halterung) Θ_s und die gewünschte Gesamtdämpfung η . $\eta = 1$ bedeutet grenzaperiodische, $\eta < 1$ geringere, $\eta > 1$ stärkere Dämpfung.

Sie ist definiert zu

$$\eta = \frac{k}{2\sqrt{\Theta D}}, \quad (2)$$

worin k die Dämpfungskonstante in der Schwingungs-Differentialgleichung

$$\Theta \ddot{\alpha} + k \dot{\alpha} + D \alpha = 0 \quad (3)$$

ist. Es bedeuten α den Drehwinkel des beweglichen Systems, D die Richtkraft, Θ das gesamte Trägheitsmoment des beweglichen Systems.

Bei einem Drehpul-System kann man nun die Dämpfung aufteilen in einen Anteil η_e , der durch die elektromagnetische Rückwirkung des bewegten Systems in den Meß-Stromkreis hervorgerufen ist, und in einen zweiten Anteil η_m , der durch rein mechanische, der Drehgeschwindigkeit proportionale Dämpfung des bewegten Systems erzeugt wird. Es ist also

$$\eta = \eta_m + \eta_e, \quad (4)$$

wobei analog Gl. (2)

$$\eta_m = \frac{k_m T}{4 \pi \Theta_s (1 + v)}, \quad (5)$$

wenn man in Gl. (2) wegen Gl. (1) setzt

$$\Theta = \Theta_s + \Theta_k = \Theta_s (1 + v), \quad (6)$$

und statt D die aus der Schwingungs-Differentialgleichung (3) hervorgehende Lösung

$$D = \frac{4 \pi^2 \Theta_s (1 + v)}{T^2}. \quad (7)$$

Mit diesen Größen also ist die Leistungsempfindlichkeit eines Drehspul-Galvanometers mit Spiegel-Ablesung als Größengleichung

$$S_{Ns} = \frac{\alpha}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\eta - \eta_m}{\Theta_s (1 + v)} \frac{T^{3/2}}{\pi^{3/2}}}. \quad (8)$$

N ist die im Meß-Stromkreis verbrauchte elektrische Leistung, α der dazu gehörende Ausschlag. In dem Ausdruck ist die Winkel-Verdopplung des Ausschlages wegen einer einfachen Reflexion des Lichtzeigers schon berücksichtigt. Nach Gl. (4) ist der Ausdruck im Zähler unter der Wurzel

$$\eta - \eta_m = \eta_e.$$

Für $\eta_m = 0$ wird $\eta_e = \eta$.

Gl. (8) schreibt sich damit als Zahlenwert-Gleichung zu

$$S_{Ns} = \sqrt{\frac{10 \eta_e}{\Theta_s (1 + v)} \frac{T^{3/2}}{\pi^{3/2}} 10^3} \quad (9)$$

in $\frac{\text{mm Ausschlag auf der Skale}}{\sqrt{\mu W \cdot m \text{ Skalenabstand}}}$, wenn man einsetzt Θ_s in g cm^2 und T in s.

Wir werden in Abschn. 3 sehen, daß Gl. (8) oder (9) für das langsam schwingende Drehmagnet-Galvanometer ebenso gelten, wenn man auch dort die Dämpfung des bewegten Systems durch seine Rückwirkung in den Meßstromkreis berücksichtigt.

Da in Gl. (8) keinerlei Aussagen über die Spulenform gemacht werden, sieht man, daß, wie bekannt [21], die Leistungsempfindlichkeit bei festem $\Theta_s (1 + v)$, also konstantem Gesamtträgheitsmoment, von der Spulenform unabhängig ist. Ferner wird deutlich, daß die Leistungsempfindlichkeit bei Beibehalten eines bestimmten Verhältnisses v der Trägheitsmomente von Spiegel und Spule proportional der reziproken Wurzel aus dem Trägheitsmoment des Spiegels und der Schwingungsdauer T des beweglichen Systems hoch $3/2$ ist. Zusätzliche mechanische Dämpfungen η_m verschlechtern die sonst theoretisch erreichbare Empfindlichkeit, da die Gesamtdämpfung η fest vorgegeben ist. Man sieht hier, daß die Invarianz von S_{Ns} nur gilt, so lange η_e konstant bleibt. Man sieht auch, daß das Trägheitsmoment der Spule gegenüber dem des Spiegels klein sein soll, denn der Faktor v steht additiv im Nenner unter der Wurzel. Für $v \gg 1$ wird die Empfindlichkeit schließlich proportional $1/\sqrt{v}$.

Über das Trägheitsmoment des beweglichen Systems ist hier folgendes zu sagen: Im Gegensatz zum Drehmagnetgalvanometer ist es beim Drehspulsystem technisch nicht möglich, das Trägheitsmoment des Antriebes, nämlich hier der Spule, nahezu beliebig klein zu machen. Unter eine gewisse Grenze kommt man nicht herunter. Andererseits kann man jedoch dafür bei Spiegelgalvanometern den Ausschlag der Lichtmarke auf der Skale dadurch erhöhen, daß man den Lichtzeiger s verlängert. Das geht aber auch nicht beliebig weit, da bei zu großem Lichtzeiger wegen der Beugung des Lichtes am Spiegel die Skalenstriche nicht mehr erkennbar werden. Als Faustregel hat, VOLKMANN [17] gefunden, daß bei einem runden oder quadratischen Spiegel dessen Durchmesser \geq als $1/1000$ der Skalenentfernung sein soll. Nimmt man nun mit VOLKMANN an, daß das Trägheitsmoment der Spule Θ_k fest vorgegeben sei, so haben wir in Gl. (8) und (9) statt $\Theta_s (1 + v)$ zu setzen $\Theta_{kg} + \Theta_s$ (Θ_{kg} = Trägheitsmoment der Spule inkl. Ballast, wie Isolation,

Spiegelhalterung usw.). Da nach VOLKMANN das Verhältnis von Dicke zu Durchmesser des Spiegels nicht unter 1:50 gemacht werden darf, also konstant bleiben kann, ist das Trägheitsmoment Θ_{s_1} des Spiegels allein ansetzbar zu

$$\Theta_{s_1} = \Theta_0 \lambda^5, \quad (10)$$

wobei Θ_0 das Trägheitsmoment eines Spiegels ist, von dem ausgegangen wird, und λ ein Ähnlichkeitsfaktor, der proportional der Kantenlänge des Spiegels ist. Der Lichtzeiger kann nun aber nach dem vorigen auch proportional λ gemacht werden, so daß nach Gl. (8)

$$S_{N\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{\Theta_{kg} + \Theta_0 \lambda^5}}$$

ist.

Diese Funktion hat ein Maximum bei

$$\Theta_0 \lambda^5 = \frac{2}{3} \Theta_{kg},$$

u. nach Gl. (10) ist

$$\Theta_{s_1} = \frac{2}{3} \Theta_{kg}. \quad (11)$$

Dies besagt folgendes: Das Trägheitsmoment Θ_{s_1} des Spiegels ohne Zusatzballast muß 2/3 des Trägheitsmomentes der Spule incl. Isolation usw. sein, wenn man bei ihr an der unteren Grenze des technisch Herstellbaren angelangt ist.

VOLKMANN [15] fand

$$\Theta_{s_1} = \frac{1}{4} \Theta_{kg}. \quad (12)$$

Unser Ergebnis (11) weicht von dem von VOLKMANN gefundenen ab, weil er die Empfindlichkeit des Systems umgekehrt proportional der Richtkraft angenommen hat. Bei genauerer Untersuchung stellt sich heraus, daß die Empfindlichkeit umgekehrt proportional der Wurzel aus der Richtkraft — sie ist dem Trägheitsmoment proportional — zu setzen ist, wenn man alle sonstigen interessierenden Parameter konstant hält (Gl. (8)).

Die Größe von v kann für diesen Fall berechnet werden: Zum Trägheitsmoment der Spule Θ_k rechnet nach Gl. (6) und den vorhergehenden Definitionen das des reinen Leitermaterials. Isolation und Spiegelhalterung rechnen dort zum Spiegel. Wenn die Zwischenräume zwischen den Windungen mit Isoliermaterial (z. B. Schellack) ausgefüllt sind, so berechnet sich das Trägheitsmoment der Spule mit Isolation aus Θ_k (reines Leitermaterial) zu

$$\Theta_{kg} = \Theta_k \left(1 + (1 - \gamma) \frac{\varrho_i}{\varrho} \right). \quad (13)$$

γ = Füllfaktor, ϱ_i = Dichte der Isolation, ϱ = Dichte des Leitermaterials. Für γ findet man in [21], S. 319 Werte (γ ist dort ε genannt). Setzen wir

$$\varphi_1 = (1 - \gamma) \frac{\varrho_i}{\varrho}, \quad (14)$$

so erhält man über einige Zwischenstufen schließlich

$$v = \frac{v'}{1 + \varphi_1 (1 + v')}, \quad (15)$$

wobei

$$v' = \frac{\Theta_{kg}}{\Theta_{s_1}}. \quad (16)$$

Nach Gl. (11) ist in diesem Fall $v' = \frac{3}{2}$. Setzen wir weiter in Gl. (14) $\gamma = 0,5$; $\varrho_i = 1,2 \text{ g/cm}^3$; $\varrho = 8,9 \text{ g/cm}^3$ (Kupferdraht), so ist in den Gleichungen für das Drehspulgalvanometer mit der

kleinstmöglichen Spule zu setzen $v = 1,09$. Setzen wir $\gamma = 0,5$; $\varrho_i = 1,2 \text{ g/cm}^3$; $\varrho = 2,6 \text{ g/cm}^3$ (Aluminiumdraht), so wird $v = 0,7$, also in beiden Fällen $v \simeq 1$.

Meist wird das Trägheitsmoment und damit der Durchmesser des Spiegels bei Drehspul-Instrumenten kleiner gemacht, als diese Optimalvorschrift angibt. Innen- und Außenwiderstand eines Drehspul-Galvanometers hängen über eine Beziehung zusammen, die man u. a. aus ganz allgemein gültigen Ähnlichkeits-Beziehungen ableiten kann. Es gilt

$$\text{oder} \quad \left. \begin{aligned} R_i &= R_a \frac{1}{\iota - 1} \\ R_a &= R_i (\iota - 1) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Hierin bedeutet, angeschrieben als Zahlenwert-Gleichung

$$\iota = \varepsilon \frac{v}{1 + v} \frac{B^2 \cdot 10^{-9} T}{4 \pi \eta_e} \frac{\kappa}{\varrho} \quad (18)$$

ι ist eine dimensionslose Zahl. Es bedeutet ε einen ebenfalls dimensionslosen Faktor, der möglichst groß sein soll und der angibt, wie günstig die Form der Drehspule ist (Zahlenangaben über ε bei verschiedenen Formen der Spule werden unten gemacht). Für ε hat Verfasser den Namen „Formfaktor“ vorgeschlagen [24].

B ist die Induktion im Luftspalt des Instruments parallel zur Ebene der Drehspule. Sie ist in G zu messen. T ist die Dauer einer vollen Schwingung des ungedämpften beweglichen Systems in s . κ ist die Leitfähigkeit des verwendeten Leitermaterials in $A/\Omega \text{ cm}$; ϱ die Dichte des verwendeten Leitermaterials in g/cm^3 .

ε hat für verschiedene Formen der Spule folgende Werte: Für die Spule nach MATHER — sie ist hoch und schmal und hat senkrecht zu ihrer Drehachse einen Querschnitt, der aus 2 aneinander stoßenden Kreisen besteht — wird $\varepsilon = 2/3$. Für eine ringförmige Spule (Toroid) wird $\varepsilon = 0,347$, für das übliche Rähmchen bei Drehspul-Instrumenten bekommt man

$$\varepsilon = \frac{3 z^2}{(1 + z) \cdot (1 + 3 z)}, \quad (19)$$

wobei $z = h/e$ das Verhältnis von der Höhe h zur Breite e der Spule ist. Für $z = 2,9$ wird $\varepsilon = 0,667$; für $z \gg 1$ wird $\varepsilon \approx 1$. Verfasser hat für die Größe

$$\iota_0 = \iota \eta_e \quad (20)$$

den Namen „Anpassungszahl“ vorgeschlagen. Die von MEYER eingeführte „charakteristische Konstante γ “ ([21], dort Gl. 9/59), ist identisch mit dem Ausdruck $\frac{1}{\iota - 1}$.

Windungszahl und Drahtdurchmesser einer Drehspule lassen sich übrigens aus den bisher vorgegebenen Größen eindeutig berechnen [24].

Damit in Gl. (17) R_a nicht negativ wird, muß $\iota > 1$ sein. Dies wird um so eher erreicht, je größer κ/ϱ , (den größten Wert erreicht κ/ϱ bekanntlich bei Aluminium mit $12,8 \cdot 10^4$ gegenüber Kupfer mit $6,6 \cdot 10^4$), je günstiger der Formfaktor ε und je größer die Schwingungsdauer T ist. Genügen diese Werte noch nicht, um $\iota > 1$ zu machen, und ist man mit der Induktion im Luftspalt an der Grenze des Möglichen, so bleibt nichts übrig als die Leistungsempfindlichkeit zu vermindern [siehe Gl. (8) u. (9)] durch Vergrößern von v (d. h. also Vergrößern des Rähmchen-Trägheitsmomentes und damit der Richtkraft), oder durch Verkleinern von $\eta_e = \eta - \eta_m$, was man durch Hereinnehmen einer zusätzlichen mechanischen Dämpfung η_m erreicht. (Diese zusätzliche Dämpfung kann bekanntlich auch wieder elektrisch ausgeführt werden, indem man an der Spule eine Windung anbringt, die über einen passenden Widerstand kurzgeschlossen wird.) Ein fertig gebautes Instrument können wir an zu große Außenwiderstände R_a anpassen, indem wir entweder die Luftspaltinduktion erhöhen, dann bleibt die Leistungs-Empfindlichkeit konstant, oder eine zusätzliche mechanische Dämpfung anbringen, wie aus den Beziehungen (17) und (18) hervorgeht, jedoch wird in diesem Fall die Leistungs-Empfindlichkeit verkleinert.

2. Strom- und Spannungs-Empfindlichkeit

Die Strom-Empfindlichkeit eines Drehspul-Galvanometers läßt sich aus der Leistungs-Empfindlichkeit berechnen, indem man den Ausdruck Gl. (8) oder (9) mit $\sqrt{R_i + R_a}$ multipliziert, denn es ist

$$S_{Ng} = \frac{\alpha}{\sqrt{N}} = \frac{\alpha}{I \sqrt{R_i + R_a}}. \quad (21)$$

Je nachdem, ob der Innenwiderstand des Instruments oder der Außenwiderstand des Meßstromkreises vorgegeben ist, erhält man unter Benützung von Gl. (17) nach dieser Multiplikation für Spiegel-Galvanometer die Zahlenwert-Gleichungen

$$S_I = \sqrt{\frac{10 (\eta - \eta_m)}{\Theta_s (1 + v)}} R_a \iota \frac{T^{3/2} 10^3}{\pi^{3/2}} \quad (22a)$$

oder

$$S_I = \sqrt{\frac{10 (\eta - \eta_m)}{\Theta_s (1 + v)}} R_i \iota \frac{T^{3/2} 10^3}{\pi^{3/2}} \quad (22b)$$

in $\frac{\text{mm Ausschlag}}{\text{mA} \cdot \text{m Zeigerlänge}}$, wenn man, wie bisher immer, einsetzt Θ_s in gcm^2 , R_a und R_i in Ω , T in s und die übrigen Größen dimensionslos.

In Gl. (22a) erkennt man, daß bei einem vorgegebenen Außenwiderstand R_a die größte Empfindlichkeit dann zu erreichen ist, wenn man aus einer Typenreihe eines Instrumentes dasjenige auswählt, bei dem ι nur wenig größer als 1 ist. Dann muß aber auch R_i sehr groß sein. (Unter einer „Typenreihe“ wird eine Reihe von Instrumenten verstanden, die bei verschiedener Spulenbewicklung (verschiedenes R_i) die gleiche Empfindlichkeit S_{Ng} haben.) Ist jedoch R_a sehr groß, so wird nichts anderes übrig bleiben, als ein Instrument mit ziemlich großem ι zu wählen, so daß nach Gl. (17) R_i innerhalb technisch erreichbarer Grenzen bleibt. Wählt man beim Bau eines Instrumentes R_i von vornherein so groß, daß man die obere Grenze des technisch möglichen erreicht, so muß nach Gl. (22b) ι so groß als möglich gemacht werden, wenn die Empfindlichkeit weiter gesteigert werden soll. Ein großer Innen- und Außenwiderstand bedeutet, daß der Spannungsabfall an einem derartigen für Strom empfindlichen Instrument groß ist.

Daraus folgt die bekannte Tatsache, daß man ein für Strom empfindliches Instrument zur Messung von großen Spannungen bei kleinstem Leistungsverbrauch verwenden muß, dem gegebenenfalls ein Widerstand vorgeschaltet wird.

Hat man ein solches Instrument zu bauen, so kann man die Drehspule technisch nicht so hochohmig machen, daß die Messung ohne Vorwiderstand zu bewerkstelligen ist. Die Leistungsaufnahme des ganzen Systems plus Vorwiderstand ist dann am kleinsten, wenn ein möglichst kleiner Strom verbraucht wird.

Ist der Innenwiderstand dieser zu messenden Spannungsquelle klein, so ist der Außenwiderstand R_a des Instrumentes im wesentlichen bestimmt durch den Vorwiderstand. Muß dieser wegen der Größe der zu messenden Spannung so groß werden, daß das bewegliche System zusätzlich mechanisch gedämpft werden muß, man also z. B. mit der Induktion B im Luftspalt an der Grenze des möglichen angelangt ist, so kann man beim Bau eines Instrumentes durch Verbesserung von ϵ , κ/ϱ und geeigneter Dimensionierung von v noch eine kleine Verbesserung erzielen. Schreibt man in Gl. (22b) den Ausdruck für ι aus, so erhält man für ein Instrument mit Lichtzeiger die folgende Zahlenwertgleichung

$$S_I = \sqrt{\frac{\epsilon}{\Theta_s}} \frac{v}{(1 + v)^2} \frac{\kappa}{\varrho} R_i \frac{B T^2}{20 \pi^2} \quad (23)$$

in $\frac{\text{mm Ausschlag}}{\text{mA} \cdot \text{m Zeigerlänge}}$, wenn man die Größen in den zu den Gln. (18) und (22) angegebenen Dimensionen mißt. R_i wird in Ω gemessen. Für ein Instrument mit körperlichem Zeiger erhält

man die Hälfte. Der in Gl. (23) enthaltene Ausdruck $\frac{v}{(1+v)^2}$ wird zu einem Maximum für $v = 1$. Gehen wir analog wie bei Gl. (18) vor, so erhalten wir für die Spannungs-Empfindlichkeit bei Licht-Zeiger (einfache Reflexion vorausgesetzt) die Zahlenwert-Gleichungen

$$S_E = \sqrt{\frac{10 (\eta - \eta_m)}{\Theta_s (1+v)} \cdot \frac{1}{R_a} \cdot \frac{\iota - 1}{\iota} \cdot \frac{T^{3/2} \cdot 10^3}{\pi^{3/2}}}, \quad (24a)$$

$$S_E = \sqrt{\frac{10 (\eta - \eta_m)}{\Theta (1+v)} \cdot \frac{1}{R_i \iota} \cdot \frac{T^{3/2} \cdot 10^3}{\pi^{3/2}}}. \quad (24b)$$

Alle Größen sind wieder in den bei den Gln. (18) angegebenen Dimensionen einzusetzen. Ist R_a vorgegeben, so wird man aus einer Typenreihe von Instrumenten dasjenige wählen, bei dem ι groß gemacht werden kann und bei dem nach Gl. (17) R_i möglichst klein ist. Die Empfindlichkeit für Spannungen wächst nach Gl. (24a) mit $\sqrt{\frac{\iota-1}{\iota}}$, jedoch nicht sehr rasch, wenn man beim Bau des Instrumentes $\iota \gg 1$ macht, da dann $\frac{\iota-1}{\iota}$ asymptotisch gegen $+1$ geht und R_i sehr klein wird (Gl. (17)).

Will man ein Instrument bauen, das zur Messung sehr großer Ströme dienen soll, so soll auch die daran abfallende Spannung sehr klein sein. Man geht dann bekanntlich mit dem Widerstand der Spule R_i an die untere Grenze dessen, was wegen des Widerstandes der Zuleitungen — sie gehören zu R_a — noch technisch tragbar ist und schaltet dem Instrument u. U. einen Widerstand parallel.

Macht man ι nur wenig größer als 1, dann wird nach Gl. (17) R_a viel kleiner als R_i . Ist der Innenwiderstand der Zweipolquelle größer als R_a , so muß zur Anpassung, wie schon erwähnt, dem Instrument ein Widerstand parallel geschaltet werden.

Da ι nur wenig größer als 1 ist, kann man es sich u. U. leisten, wegen des störenden Temperaturkoeffizienten des Widerstandes diesen aus einem Draht mit sehr kleinem Temperaturkoeffizienten zu wickeln. Solche Drähte (z. B. Konstanten oder Manganin) haben allerdings einen großen Widerstand, so daß R_i ziemlich groß wird.

Besser wird es im allgemeinen sein, Kupfer oder Aluminium für die Spule zu verwenden und den störenden großen Temperaturkoeffizienten zu kompensieren, z. B. durch einen ebenso großen des Parallelwiderstandes oder durch einen Widerstand mit genügend großem negativem Temperaturkoeffizienten in den Zuleitungen zur Spule.

3. Leistungs-Empfindlichkeit des Drehmagnet-Galvanometers

Beim Drehmagnet-Galvanometer ruht, im Gegensatz zum Drehspul-Galvanometer die Antriebsspule, und es bewegt sich der Magnet. Nach einem Vorschlag von W. MEISSNER u. ADEL-

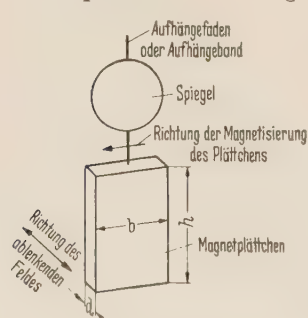


Bild 1. Bewegliches System des Drehmagnet-Galvanometers.

BERGER [4] kann man nun mit Hilfe moderner Magnetmaterialien statt der früher verwendeten Vielzahl an einer dünnen Stange übereinander befestigter Magnet-Nädelchen [6] ein einziges hohes und schmales Magnetplättchen verwenden, das in Richtung zu seiner zweitgrößten Achse magnetisiert ist (Bild 1). Vernachlässigt man bei einem derartigen Drehmagnet-Galvanometer zunächst die Dämpfung, welche das bewegte System durch seine Rückwirkung in den Meßstromkreis hervorruft, so erhält man folgende Größen-gleichung für die Leistungsempfindlichkeit

$$S_{Ng} = \frac{\alpha}{\sqrt{N_M}} = \frac{v g T^2 \rho}{4 \pi^2 \sqrt{R_i + R_a}} \sqrt{\frac{12 h v}{\Theta_s (1+v)^2}}. \quad (25)$$

Hierin bedeutet $v (\approx 0,8)$ ein Sicherheitsfaktor < 1 wegen der Streuung der magnetischen Polarisation des verwendeten Magnet-Materials. (Sie ist in ρ enthalten.) g ist definiert durch die Beziehung $H = g I$, wobei H die magnetische Feldstärke am Ort des Magnet-Plättchens ist und

I der sie erzeugende Strom. Für eine Luftspule, die nach der Vorschrift von MAXWELL gewickelt worden ist [11], [10] wurde z. B. $g = 450$ 1/cm. R_i ist wieder der Innenwiderstand des Instruments, R_a der Außenwiderstand, h die Höhe des verwendeten Magnetplättchens, gemessen parallel zur Drehachse des beweglichen Systems. Bei vielen zueinander parallelen kleinen Magnet-Nädelchen bedeutet h die Summe der Höhe dieser Plättchen, gemessen parallel zur Drehachse des beweglichen Systems. Θ_s , v und T haben dieselbe Bedeutung wie beim Drehspul-Galvanometer. ϕ beinhaltet die magnetischen Daten des Magnet-Plättchens.

Es ist definiert zu

$$\phi = \frac{B_\beta(\beta + 1)}{\sqrt{\beta}(\beta^2 + 1)\varrho} \quad (26)$$

Darin bedeuten $\beta = b/d \geq 1$ das Verhältnis der Längen der Kanten b und d des Magnet-Plättchens (Bild 1). Gleichzeitig ist aber auch $\beta = \tan \delta$, wobei δ der Winkel ist, den die Scherungsgerade mit der Abszisse in dem Koordinatensystem B über $\mu_0 H$ einschließt (Bild 2). In diesem Koordinatensystem ist die äußerste Hysteresis-Kurve des für das Plättchen verwendeten Magnet-Materials einzutragen. Der Schnittpunkt der Scherungs-Geraden — $\mu_0 H$

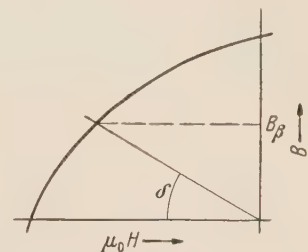


Bild 2. Verlauf einer äußersten Hysteresis-Kurve eines magnetisch harten Materials im II. Quadranten.

$= B_\beta/\beta = B_\beta d/b$ mit einer derartigen Hysteresis-Kurve ergibt die „scheinbare Remanenz“ B_β , welcher das magnetische Moment des verwendeten Magnet-Materials proportional ist. Dies gilt solange, als das Verhältnis der Höhe h zur Dicke d des Magnet-Plättchens $h/d \geq 3\beta$ ist (Bild 1) [24]. Diese Beziehungen sind unter der Annahme abgeleitet worden, daß das verwendete Magnet-Plättchen homogen magnetisiert ist und seine Abmessungen b , d und h die der Hauptachsen des eingehüllten Ellipsoids sind. Nach Untersuchungen, die WÜHRSCMIDT [5] über den Entmagnetisierungs-Faktor von längs magnetisierten Rechteck-Stäben gemacht hat und nach einer vom Verfasser angestellten kurzen Fehlerrechnung und gemachten praktischen Erfahrungen wirken sich die bei dieser Annäherung gemachten Fehler in der Praxis nicht aus.

ϱ ist die Dichte des verwendeten Magnet-Materials.

Man sieht aus Gl. (25), daß ϕ möglichst groß sein muß. Es ist also ein Gütemaß für die Eignung des betreffenden Magnet-Materials für das zu bauende Drehmagnet-Galvanometer. Seine Dimension ist $G/(g/cm^3)^{1/2}$, wenn man B_β in G und ϱ in g/cm^3 mißt. Durch Probieren mit verschiedenen Werten von β kann man das maximale ϕ grafisch aus der Hysteresis-Kurve des zu untersuchenden Werkstoffes leicht ermitteln. Hier einige Werte für ϕ :

Verwendeter Magnet-Werkstoff	Magnetische Kennziffer [1]	β (Optimalwert)	ϕ $G/\sqrt{g/cm^3}$
	$(B_1 \cdot H)_{max} / B_1 H_c - B_1 \cdot \mu_0 H_1 - \mu_A$		
Alnico mit magn. Vorzugsrichtung, gegossen	0,58 — 5,3 — 20	18	940
Walzbare Magnet-Legierung Magnetoflex 20 (Siemens & Halske)	0,475 — 0,92 — 23	16	355
PtCo	0,314 — 3,75 — 1,67	1,25	688

Die Dämpfung des bewegten Systems durch seine elektro-magnetische Rückwirkung in den Meß-Stromkreis kann man unter Zuhilfenahme des Satzes von der Erhaltung der Energie berechnen und damit in Gl. (25) berücksichtigen. Dabei kann man von der Überlegung ausgehen, daß bei einem bestimmten Ausschlag α des bewegten Systems potentielle Energie in den das System rückstellenden Federn mit der Richtkraft D , also im Aufhänge-Faden oder -Bändchen gespeichert ist. Diese Energie $D\alpha^2/2$ kann nur durch den fließenden Strom aufgebracht worden sein. Untersucht man die Verhältnisse beim Drehspul-Galvanometer, so erhält man die einfache Beziehung

$$\frac{D\alpha^2}{2} \bigg| (NT) = \frac{\eta_e}{2\pi}, \quad (26a)$$

wobei T wieder die Dauer einer vollen ungedämpften Schwingung des beweglichen Systems ist. Das grenzperiodisch gedämpfte System erreicht nach T s 98% seines Endausschlages, so daß also nach dieser Zeit der Einschwing-Vorgang praktisch beendet ist. NT ist die während der Zeit T im Meß-Stromkreis verbrauchte elektrische Energie, nachdem Vollausschlag erreicht ist. Überträgt man die energetische Beziehung Gl. (26a) vom Drehspul-Galvanometer auf das Drehmagnet-System, so erhält man unter Verwendung der Gl. (25) und (26) auch für das Drehmagnet-System die schon für das Drehspul-System gewonnene Beziehung Gl. (8) oder (9) und weiter für die Anpassungs-Zahl ι_1 (der Index 1 bezieht sich auf das Drehmagnet-System), angeschrieben als Zahlenwert-Gleichung:

$$\iota_1 = \frac{3}{\pi} \frac{v}{(1+v)} \frac{v^2 g^2 p^2 h T \cdot 10^{-9}}{R_i \eta_e}, \quad (27)$$

wenn man mißt g in 1/cm, p in $\frac{G}{\sqrt{g/\text{cm}^3}}$, h in cm, T in s und R_i in Ω . v , v und η_e sind dimensionslos.

Man erkennt die große Ähnlichkeit mit Gl. (18) (p hat die Dimension $G/\sqrt{g/\text{cm}^3}$.)

Änderungen der magnetischen Werte v p \sqrt{h} des Gehänges haben beim Drehmagnetsystem dieselbe Wirkung wie beim Drehspulsystem. Änderungen der Luftspaltinduktion B : Bei Erhaltung der Gleichstromleistungs-Empfindlichkeit ändert man nur das Verhältnis von Innen- zu Außenwiderstand. Zur Berechnung von R_i und R_a stehen uns nun die Beziehungen Gl. (17) zur Verfügung, in denen anstelle von ι beim Drehmagnetsystem ι_1 tritt. Das Drehmagnet-Instrument kann an einen vorgegebenen Außenwiderstand viel besser als das Drehspul-Galvanometer angepaßt werden, da am fertigen Instrument die Antriebsspulen auswechselbar sind. Die Spulen können mit viel größerem, aber auch mit viel kleinerem Widerstand als beim Drehspulinstrument hergestellt werden. Man kann auch Teile der Spulen wahlweise zueinander parallel oder in Serie schalten.

Zum Faktor g^2/R_i ist folgendes zu sagen: Er ist proportional $\frac{w^2}{R_i}$, da g proportional der Windungszahl w der Spule ist. w^2/R_i bleibt bekanntlich konstant, wenn man bei Erhaltung der Geometrie der Spulen und des Füllfaktors die Windungszahl ändert.

Mit kleiner werdender Schwingungsdauer T kommt man nach Gl. (17) u. (18) bei $R_a = 0$ und $\iota = 1$ an den Punkt, wo die elektromagnetische Rückwirkung zur grenz-aperiodischen Dämpfung gerade noch und dann bei weiterer Verkleinerung von T nicht mehr ausreicht. Dann muß, gerade so wie beim Drehspulsystem in einem solchen Fall, eine zusätzliche mechanische Dämpfung eingeführt werden. Sie ist letzten Endes dann die Ursache dafür, daß die Empfindlichkeit sowohl des Drehmagnet- wie auch des Drehspul-Instrumentes bei verschwindender elektromagnetischer Rückwirkung mit T^2 [Gl. (23) bis (25)] rascher abnimmt als die eines Instrumentes, das noch durch rein elektromagnetische Rückwirkung in den Meßkreis gedämpft werden kann.

Hier interessiert vielleicht noch, welche Eigenschwingungsdauer ein Drehmagnetgalvanometer unter realisierbaren Bedingungen haben muß, damit es grenzaperiodisch durch die elektromagnetische Rückwirkung gedämpft wird. Man findet hier die folgende Zahlenwertgleichung

$$T = \frac{\pi (R_i + R_a) (1+v) \eta_e 10^9}{3 v^2 g^2 p^2 h v} \quad (28)$$

in s, wenn man mißt R in Ω , g in 1/cm, p in $\frac{G}{\sqrt{g/\text{cm}^3}}$, h in cm, v , v und η_e sind dimensionslos.

Setzt man folgende Werte ein: $R_a = R_i = 7 \Omega$ (Spule nach VOLKMANN [10] mit einem Widerstand von 7Ω), $g = 452$ 1/cm, $p = 342 \frac{G}{\sqrt{g/\text{cm}^3}}$, $h = 1$ cm, $v = 1$, $\eta_e = 1$, $\eta_m = 0$ (grenz-aperiodische Dämpfung), so wird

$$T = 1,98 \text{ s.} \quad (29)$$

Für $R_a \rightarrow 0$ geht $T \rightarrow \frac{1,98}{2} = 0,99$ s. Für kleinere Eigenschwingungsdauern bei sonst konstanten Parametern wird dann $t_1 < 1$, wie man sich leicht überzeugt, und damit gilt das schon im Anschluß an die Gln. (17) bis (20) Gesagte.

NERNST ist es übrigens in den zwanziger Jahren bereits gelungen, ein empfindliches astatistisches Drehmagnet-Galvanometer zu bauen, das bei Anlegen niedriger Außenwiderstände rein durch elektromagnetische Rückwirkung gedämpft wurde (WERNER [23]).

4. Die thermische Grenze der Empfindlichkeit und daraus resultierende Bauvorschriften

ISING [13] und ZERNICKE [14] haben theoretisch nachgewiesen, daß es aus thermodynamischen Gründen eine Grenze der Empfindlichkeit von Meßinstrumenten gibt. Die thermisch-statistischen Schwankungen der Anzeige errechnen sich aus der Tatsache, daß die Energie des um nur eine Achse drehbaren Systems (also bei einem Freiheitsgrad) gleich $\frac{k_B t_A}{2}$ ist, (k_B = BOLTZMANN-Konstante, t_A = absolute Temperatur). Die mittlere Energie, die in der Rückstellkraft D gespeichert ist, muß gleich sein dieser thermischen Energie, also

$$\frac{D \bar{\alpha}_B^2}{2} = \frac{k_B t_A}{2} \quad (30)$$

Berücksichtigen wir, daß wir in $\frac{\text{mm Ausschlag}}{\text{m Skalenabstand}}$ messen und daß der Ausschlag auf der Skale wegen der Winkelverdoppelung durch den Spiegel auch verdoppelt wird, so ist die mittlere Schwankung des Ausschlages auf der Skale bei einem Skalenabstand von s durch die folgende Zahlenwertgleichung ausgedrückt

$$\sqrt{\bar{\alpha}_B^2} = 2000 s \sqrt{\frac{k_B t_A}{D}} = \frac{2000 s}{2 \pi} \sqrt{\frac{k_B t_A}{\Theta_s (1 + \nu)}} T \quad (31)$$

in mm. Es ist $k_B = 1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/°K; es werden gemessen t_A in °K, D in dyn cm, s in m, T in s, Θ_s in g cm². Ist die mittlere Schwankung des Ausschlages auf der Skale vorgegeben, so kann man die Länge s des Lichtzeigers berechnen, indem man Gl. (31) nach s auflöst und erhält so die Zahlenwertgleichung

$$s = \frac{\pi \sqrt{\bar{\alpha}_B^2}}{10^3 T} \sqrt{\frac{\Theta_s (1 + \nu)}{k_B t_A}} \quad (32)$$

in m, wenn man alle Größen wie in Gl. (31) mißt.

Nach ZERNICKE [14] rufen nun die Schwankungen der Stromverteilung in den Antriebsspulen eines Systems dieselben Schwankungen des Ausschlages auf der Skale hervor wie die thermisch-statistischen Einflüsse, wenn das System durch elektromagnetische Rückwirkung allein grenzaperiodisch gedämpft ist. Diese Schwankungen sind so, als ob in den Antriebsspulen eine Leistungsschwankung von (als Zahlenwertgleichung)

$$\bar{N}_B = \frac{\pi k_B t_A \cdot 10^{-7}}{T} = \frac{4,34 \cdot 10^{-23} \cdot t_A}{T} \quad (33)$$

in W (T in s, t_A in °K und $k_B = 1,38 \cdot 10^{-16}$) tätig wäre. Daraus errechnen sich die scheinbaren Stromschwankungen in den Antriebsspulen zahlenmäßig zu

$$\sqrt{\bar{I}_B^2} = \sqrt{\frac{\pi k_B t_A \cdot 10^{-7}}{T(R_i + R_a)}} \quad (34)$$

in A, wenn man R_i in Ω und die übrigen Größen wie in Gl. (31) mißt, oder die scheinbaren Schwankungen der EMK zahlenmäßig zu

$$\sqrt{\bar{E}_B^2} = \sqrt{\frac{\pi k_B t_A \cdot 10^{-7} (R_i + R_a)}{T}} \quad (35)$$

in V, wenn man wieder mißt wie in den Gln. (31) bis (34).

Wie kann man nun die Gesamtleistungs-Empfindlichkeit steigern? Nach den Gln. (8) u. (9) geht die Leistungsempfindlichkeit $S_N = \frac{\alpha}{\sqrt{N}}$ mit $T^{3/2}$, andererseits ist nach Gl. (31) die BROWNSche Bewegung $\sqrt{\alpha_B^2}$ proportional T . Wir wollen die mit $\sqrt{N_g}$ multiplizierte Gl. (8) und Gl. (31) durcheinander dividieren und erhalten:

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha_B^2}} = \frac{S_N \sqrt{N_g}}{\sqrt{\alpha_B^2}} = \sqrt{N_g} \frac{\sqrt{\frac{\eta_e}{\Theta_s (1+v)} \frac{T^{3/2}}{2\pi^{3/2}}}}{\sqrt{\frac{k_B t_A}{\Theta_s (1+v)} \frac{T}{2\pi}}} = \sqrt{\frac{N_g \eta_e T}{\pi k_B t_A}}. \quad (36)$$

Daraus folgt, daß bei konstant bleibender Temperatur und damit bei konstanter Wärmebewegung $\sqrt{\alpha_B^2}$ die Empfindlichkeit gesteigert werden kann, wenn man die Schwingungsdauer des Systems erhöht. Wegen der kleineren Leistung N_g dauert es eben längere Zeit, bis der Rückstellkraft des beweglichen Systems eine Energie zugeführt ist, die genügend viel größer als die thermische Energie der Umgebung ist.

Will man also an der unteren Grenze der Leistungs-Empfindlichkeit — also bei $\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha_B^2}} \simeq 1$ zehnmal genauer messen, so muß man die Schwingungsdauer 100mal größer machen, damit man auf der Skale den gleichen Ausschlag bekommt. Man kann nach dem statistischen Fehlergesetz (siehe auch ZERNICKE [14]) die gleiche Meßgenauigkeit auch dadurch erreichen, daß man mit dem schnellschwingenden Instrument 100 Messungen macht und aus diesen mittelt. Die Meßdauer bleibt theoretisch die gleiche, jedoch kommt in Wirklichkeit die Auswertezeit hinzu; das langsamere schwingende Instrument mittelt selbsttätig. Man kann auf Grund dieser Gesetzmäßigkeiten Bauvorschriften machen. Aus der Gl. (36) kann man sich die untere Grenze der Empfindlichkeit und damit die Schwingungsdauer T vorgeben. Dann läßt sich aus Gl. (31) oder (32) das Trägheitsmoment Θ_s der Spiegels und damit seine Größe berechnen, wenn man $\sqrt{\alpha_B^2}$ und die Skalenentfernung vorgibt. Man erhält, nach Θ_s aufgelöst, die Zahlenwertgleichung

$$\Theta_s = \frac{10^6 s^2 k_B t_A \cdot T^2}{\pi^2 \alpha_B^2 (1+v)} \quad (37)$$

in g cm^2 , wenn man einsetzt: $k_B = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/}^\circ\text{K}$, t_A in $^\circ\text{K}$, s in m , T in s , $\sqrt{\alpha_B^2}$ in mm . Z. B. wird für $T = 1 \text{ s}$, $s = 1 \text{ m}$ und $\sqrt{\alpha_B^2} = 0,07 \text{ mm}$, $v = 1$, $t_A = 293 \text{ }^\circ\text{K} \hat{=} 20 \text{ }^\circ\text{C}$

$$\Theta_s = 41,8 \cdot 10^{-8} \text{ g cm}^2, \quad (38)$$

d. h. unser Spiegel darf z. B. $1,23 \times 1,23 \times 0,08 \text{ mm}^3$ groß sein. Wir bekommen so bei 1 m Skalenentfernung noch eine gute Ausleuchtung, denn der Durchmesser des Spiegels bräuchte ja nach VOLKMANN [17] nur 1 mm zu sein. Natürlich kann man so kleine Trägheitsmomente nur beim Drehmagnetgalvanometer erzielen. Es hat also gar keinen Sinn, sein bewegliches System bei Einstellzeiten von ca. 1 s und mehr so klein als irgend möglich zu bauen, da die Baudaten alle vorgegeben werden können. Der Spiegel und damit das System werden nach Gl. (37) sogar umso größer, je größer die Schwingungsdauer gemacht, je kleiner also nach Gl. (33) die noch meßbare Leistung werden soll. Schwierigkeiten treten erst auf, wenn man die Schwingungsdauer T klein macht, denn man muß dann nach Gl. (32) entweder die Länge des Lichtzeigers s größer machen, wenn man an der durch T in Gl. (33) gegebenen Meßgrenze bleiben will, oder Θ_s kleiner machen. Wenn T klein wird, muß man auch darauf achten, daß im Falle des Drehspulinstrumentes ι (Gl. (18)) bzw. im Fall des Drehmagnetgalvanometers ι_1 (Gl. (27)) möglichst ≥ 2 sind ($R_i = R_a$ bei $\iota = 2$), auf jeden Fall aber > 1 bleiben, damit die gewünschte Dämpfung durch die elektromagnetische Rückwirkung allein erzielt werden kann.

Beim Drehspulsystem ist es nun leider nicht möglich, das bewegliche Organ so klein zu machen wie beim Drehmagnet-Instrument. Nach Gl. (31) können wir aber mit der Drehspule trotzdem an die Grenze der Empfindlichkeit gelangen, wenn wir entweder den Lichtzeiger s sehr lang

machen oder sonst Maßnahmen zur Ausschlag-Verstärkung ergreifen, was einer Vervielfachung von s gleichkommt. Hierher gehört z. B. die bekannte Vervielfachung des Ausschlagwinkels durch Mehrfach-Reflexion an einem festen Spiegel, der dem beweglichen sehr nahe gebracht wird.

Will man die Ausschlag-Vergrößerung allein durch Verlängern des Lichtzeigers s erzielen, dann müssen die durch die Gln. (32) und (10) bis (16) ermittelten Bedingungen eingehalten werden: Danach ist $\Theta_{s_1} = \frac{1}{v'} \Theta_{kg}$ und $v' = 3/2$.

Andererseits ist das polare Trägheitsmoment eines runden Glasspiegels bezüglich einer Drehachse, die parallel zu einem Radius durch seinen Mittelpunkt geht, ganz allgemein, wenn man seine Dicke gleich einem konstanten Bruchteil $1/z$ (dabei muß sein $z \geq 10$) eines Durchmessers d_s macht:

$$\Theta_{s_1} = \frac{\pi d_s^5 \varrho_s}{64 z} \quad (39)$$

ϱ_s = Dichte eines Spiegels.

Nach d_s aufgelöst ergibt das als Zahlenwertgleichung

$$d_s = 10 \cdot \sqrt[5]{\frac{\Theta_{s_1} 64 z}{\pi \varrho_s}} \quad (40)$$

und nach Gl. (16)

$$d_s = 10 \sqrt[5]{\frac{\Theta_{kg} \cdot 64 z}{v' \pi \varrho_s}} \quad (41)$$

in mm, wenn man mißt Θ in gcm^2 , ϱ_s in g/cm^3 .

Nun soll der Durchmesser des Spiegels in mm wenigstens gleich sein der Skalenentfernung in m [17].

Setzt man nach diesen Vorschriften die Zahlenwert-Gln. (32) und Gl. (41) einander gleich, so erhält man unter Zuhilfenahme der Beziehung $\Theta_s (1 + v) = \Theta_{s_1} (1 + v')$ [24] die Zahlenwertgleichung

$$T = \frac{\pi \sqrt{\alpha_B^2} \Theta_{kg}^{3/10}}{10^4} \sqrt[5]{\frac{1 + v'}{k_B t_A v'}} \sqrt[5]{\frac{\pi \varrho_s v'}{64 z}} \quad (42)$$

in s, wenn man mißt $\sqrt{\alpha_B^2}$ in mm; Θ in gcm^2 , $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/}^\circ\text{K}$, t_A in $^\circ\text{K}$; ϱ_s in g/cm^3 .

Setzen wir ein $\sqrt{\alpha_B^2} = 0,1 \text{ mm}$ (das gibt eine max. Amplitude von ca. $\pm 0,14 \text{ mm}$); $v' = 3/2$; $t_A = 293 \text{ K}^\circ$; $\varrho_s = 2,5 \text{ g/cm}^3$; $z = 50$, so wird

$$T = 65,7 \Theta_{kg}^{3/10} \quad (43)$$

in s, wenn man Θ in gcm^2 mißt.

Damit ist also die kleinste Eigenschwingungsdauer vorgegeben, bei der bei einem vorgegebenen Trägheitsmoment der Drehspule einschließlich Isolation Θ_{kg} mit der Skalenentfernung bei direkter Spiegelablesung und einfacher Reflexion an die Grenze des Möglichen gegangen wird, so daß einerseits noch gut abgelesen werden kann und andererseits die statistischen Wärmebewegungen bei 20°C im Mittel $\pm 0,1 \text{ mm}$ ausmachen.

Man muß nun noch darauf achten, daß die mechanische Dämpfung zu Null wird, so daß durch die elektromagnetische Rückwirkung allein gedämpft wird.

Beim Drehmagnetschwinger ist die untere Grenze der Schwingungsdauer, bei der die BROWNSchen Bewegungen des Systems auf der Skale die mittlere Auslenkung $\sqrt{\alpha_B^2} \text{ mm}$ erzeugt, direkt aus Gl. (32) ableitbar, weil das Trägheitsmoment des beweglichen Systems ohne übermäßige Schwierigkeiten sehr klein gehalten werden kann. Mit der Vorschrift, daß $\frac{d_s}{\text{mm}} = \frac{s}{\text{m}}$ sein muß, ergibt sich bei einem runden Spiegel aus den Gln. (32) und (39), wenn man den Ballast, wie Spiegelhalterung und dergl. vernachlässigt für seinen Durchmesser die Zahlenwertgleichung

$$d_s = 4 \sqrt[3]{\frac{10^8 k_B t_A z T^2}{\alpha_B^2 (1 + v) \varrho_s}} \quad (44)$$

in cm, wenn man mißt $k_B = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/}^\circ\text{K}$, t_A in $^\circ\text{K}$, $\sqrt{\alpha_B^2}$ in mm und ϱ_s in g/cm^3 .

Das Trägheitsmoment des Spiegels ergibt sich aus Gl. (39), die Abmessungen des Magnetplättchens lassen sich ebenfalls angeben [24]. Bei kleinen Schwingungsdauern muß man noch darauf achten, daß $t_1 > 1$ wird.

Für eine Schwingungsdauer von z. B. 0,2 s ergibt sich aus Gl. (44) bei $t = 293^\circ\text{K}$, $\sqrt{\alpha_B^2} = 0,07\text{ mm}$, $v = 1$, $\rho_s = 2,5\text{ g/cm}^3$, $z = 15$ ein Spiegeldurchmesser von $\approx 0,6\text{ mm}$, woraus eine maximale Skalenentfernung von $s \approx 0,6\text{ m}$ resultiert.

Aus Gl. (27) ergibt sich, wenn man einsetzt

$v = 1$, $v = 0,8$; $g = 452\text{ 1/cm}$; $p = 670 \frac{G}{\sqrt{g/\text{cm}^3}}$; $h = 1\text{ cm}$; $T = 0,2\text{ s}$; $R_i = 7\ \Omega$; $\eta_e = 0,8$, für $t_1 = 0,998$, also zu wenig. Für $T = 0,4\text{ s}$ wird $t_1 \approx 2$ und nach Gl. (35) $d_s = 0,9\text{ mm}$, also $0,9\text{ m}$ max. Skalenabstand. Natürlich könnte man, statt T zu vergrößern, auch $\frac{g^2}{R_i}$ durch Vergrößern der Antriebsspule steigern. Unter den gewählten sonstigen Bedingungen ist also beim Drehmagnet-Galvanometer eine kleinste Einstellzeit von $T = 0,2 \dots 0,4\text{ s}$ die unterste Grenze dessen, was sich heute praktisch einigermaßen realisieren läßt, wenn man an der unteren Grenze des Meßbaren bleiben will und sich auf einfache Spiegelablesung beschränkt.

Man kann nun zu folgenden Schlüssen kommen:

Will man ein empfindliches Galvanometer bauen, mit dem man so kleine elektrische Leistungen noch messen kann, als die thermische Energie der Umgebung noch zuläßt, so gelingt dies beim Drehmagnet-Galvanometer technisch nur für Schwingungsdauern des beweglichen Systems in der Größenordnung von $T \geq 0,2\text{ s}$, beim Drehspulinstrument für $T \geq 7\text{ s}$. Dabei ist es einfacher, bei direkter Spiegelablesung und einfacher Reflexion am Spiegel das Instrument nach dem Prinzip des Drehmagnet-Galvanometers als nach dem des Drehspulsystems zu bauen, denn man braucht dann keinen sehr langen Lichtzeiger, weil man das bewegliche System sehr klein und leicht bauen kann. Zudem entfallen beim Drehmagnet-Galvanometer die Schwierigkeiten, die beim Drehspul-Galvanometer wegen der Stromzuführung entstehen. Man kann auch aus diesem Grunde das Drehspul-Galvanometer schlechter an sehr niederohmige Quellen anpassen als das Drehmagnet-Galvanometer, bei dem die Zuleitungen zu der Antriebsspule mit sehr dickem Draht ausgeführt werden können.

Trotz des zwangsläufig ziemlich großen beweglichen Systems des Drehspul-Galvanometers erreicht man bei großer Schwingungsdauer aber auch mit diesem die Grenze des überhaupt noch Meßbaren, wenn man entweder den Lichtzeiger genügend lang macht oder den Ausschlag sonstwie optisch vergrößert, z. B. fotoelektrisch (lichtelektrischer Verstärker oder Verstärkung nach ZERNICKE [14] mit einer Differential-Thermoleiter). Die Hauptschwierigkeiten beim langsam schwingenden Drehmagnet-Galvanometer entstehen bei der Abschirmung gegen äußere magnetische Störfelder.

Die Empfindlichkeit gegen Erschütterungen ist beim Drehmagnetsystem mit seinem kurzen Lichtzeiger erheblich geringer als beim Drehspulinstrument, denn eine Störverdrehung des ganzen Instrumenten-Gehäuses um einen bestimmten festen Winkel $\Delta\alpha$ wirkt sich bei langem Lichtzeiger erheblich stärker aus als bei kleinem Skalenabstand.

5. Normal-Empfindlichkeit, Gütemaße

Im folgenden soll der Versuch unternommen werden, ein Gütemaß für die Empfindlichkeit zu definieren. Es bieten sich hierzu zunächst die Gln. (8) oder (9) an. Sie lauten für ein Spiegelgalvanometer, gleichviel, ob es nach dem Drehspul- oder dem Drehmagnetprinzip arbeitet

$$S_{Ngs} = \sqrt{\frac{\eta_e}{\Theta_s (1+v)}} \frac{T^{3/2}}{\pi^{3/2}}. \quad (45)$$

Dieser Ausdruck entspricht dem von MEYER und MOERDER [21] definierten „Produktsatz der Eichempfindlichkeit“ (in [21] Gl. (11/1)). Es ist dort

$$S_i \cdot S_u = \frac{4 T_0}{\pi D}. \quad (46)$$

Ersetzt man hierin D nach Gl. (7), so wird

$$S_i \cdot S_u = \frac{T_0^3}{\pi^3 \Theta}. \quad (47)$$

Das ist bis auf η_e das Quadrat von Gl. (8). Durch Vergleich der aus den elektrischen Daten meßbaren Empfindlichkeit eines gebauten Galvanometers mit Gl. (40) kann nachgeprüft werden, wie weit die durch diese Gleichung gegebene theoretisch erreichbare Empfindlichkeit erreicht wurde. Dividiert man die bei grenzaperiodischer Dämpfung gemessene Leistungsempfindlichkeit

$$\frac{\alpha}{\sqrt{N_{gs}}} = \frac{\alpha \sqrt{R_i + R_{gr}}}{E} = \frac{\alpha}{I \sqrt{R_i + R_{gr}}}$$

durch Gl. (45) mit den eingesetzten, zugehörigen mechanischen Daten, so ist bei einem idealen Instrument dieser Quotient gleich 1, unabhängig davon, ob Θ_s , v oder η_e groß oder klein sind. Er ist umso kleiner, je weniger es gelungen ist, den theoretischen Möglichkeiten nahezukommen. (R_{gr} ist der für die grenzaperiodische Dämpfung $\eta = \eta_m + \eta_e = 1$ notwendige äußere Schließwiderstand des Instrumentes.)

Nun ist es leichter, ein Galvanometer mit großem Spiegel und großer Spule (v groß) zu bauen als ein solches, bei dem Θ_s und v klein sind. Um bis zu einem gewissen Grade die Leistung des Erbauers zum Ausdruck zu bringen, kann man so vorgehen, daß man Θ_s , v und η vorgibt.

Die Empfindlichkeit gegen Erschütterungen, soweit sie eine störende Verdrehung des Gehäuses des Instrumentes verursachen, sind bei der Bildung des oben genannten Quotienten noch unberücksichtigt geblieben. Ein Instrument ist umso unempfindlicher gegen solche Störungen, je kürzer sein Lichtzeiger ist. Multipliziert man nun den Nenner unseres Quotienten, also Gl. (45) mit dem größten zulässigen Lichtzeiger — er ist bekanntlich so viele Meter lang wie der Durchmesser des Spiegels d_s in mm mißt, — so bekommt man ein Gütemaß für die Empfindlichkeit eines Galvanometers, das umso größere Zahlen ergibt, je besser das Instrument gebaut ist und je unempfindlicher es gegen (das Gehäuse um seine Hochachse verdrehende) Erschütterungen ist.

Aus den Betrachtungen des vorigen Abschnittes wissen wir, daß die untere Grenze der noch meßbaren Ströme und Spannungen durch die BROWNSchen Bewegungen des Systems gegeben ist. Nach der Gl. (31) sind die thermischen Drehungen des Systems proportional T .

Multiplizieren wir demnach unseren Quotienten mit \sqrt{T} , so ist sein Nenner proportional T , also nun proportional der unteren Meßgrenze. Schon früher wurde versucht, den aus Gl. (46) ableitbaren Ausdruck

$$\frac{S_i S_u}{T} = \frac{4}{\pi D} \quad (48)$$

([21], S. 65) als Gütefaktor eines Galvanometers zu definieren. Gl. (45) ist nun, wie schon mit Gl. (47) gezeigt, die Wurzel aus Gl. (46). Die Division von Gl. (45) im Nenner unseres Quotienten durch \sqrt{T} ist mit der vorgeschlagenen Multiplikation identisch. Im Nenner dieses Quotienten steht dann die reziproke Wurzel aus der Richtkraft, multipliziert mit der maximal möglichen Skalenentfernung, also eine Zahl, die mit der unteren Meßgrenze linear zusammenhängt. Der ganze Quotient wird umso größer, je größer T ist.

Es wird also folgendes Gütemaß vorgeschlagen:

$$\Sigma_0 = \frac{\frac{\alpha \sqrt{R_i + R_{gr}}}{E} \sqrt{T}}{d_s \sqrt{\frac{\eta_e}{\Theta_s (1+v)} \frac{T^{3/2}}{\pi^{3/2}}}} = \frac{\frac{\alpha}{I \sqrt{R_i + R_{gr}}} \sqrt{T}}{d_s \sqrt{\frac{\eta_e}{\Theta_s (1+v)} \frac{T^{3/2}}{\pi^{3/2}}}}. \quad (49)$$

$R_i + R_{gr}$ ist der für grenzaperiodische Dämpfung nötige Widerstand des Meßkreises. Bezüglich Θ_s , v und η_e wird folgendes vorgeschlagen: Bezüglich Θ_s wird vorgeschlagen, das Trägheitsmoment eines runden Spiegels aus Glas mit $\rho_s = 2,5 \text{ g/cm}^3$ einzusetzen, dessen Durchmesser d_s

gleich dem des untersuchten Galvanometers und dessen Dicke nach den Erfahrungen von VOLKMANN [15] gleich $1/z = 1/50$ seines Durchmessers sei, also

$$\Theta_s = \frac{\pi d_s^5 \varrho_s}{64 z} = \frac{\pi d_s^5 \cdot 2,5}{64 \cdot 50} = 2,455 \cdot 10^{-3} \cdot d_s^5 \quad (50)$$

in gcm^2 , wenn man d_s in cm mißt.

Es werde gesetzt $v = 1$. Nach den Ausführungen zu Gl. (15) müßte bei Drehspulgalvanometern v ohnehin angenähert gleich 1 gesetzt werden. Bei Drehmagnetsystemen ist es ohne weiteres möglich, $v = 1$ einzuhalten.

Weiterhin werde gesetzt $\eta_e = 1$, da die Hersteller die Widerstände R_i und R_{gr} des Meßkreises für grenzaperiodische Dämpfung angeben.

Es macht nicht viel aus, wenn beim untersuchten Instrument η etwas von 1,0 abweicht, denn bei einer Änderung von η um z. B. 20% ändert sich nach Gl. (45) die Empfindlichkeit bei $\eta_m = 0$ nur etwa um 10%, bei $\eta_m \neq 0$ wegen $\eta_e = \eta - \eta_m$ sogar noch weniger. Zwei miteinander verglichene Instrumente können somit als etwa gleich gut bezeichnet werden, wenn die Werte von Σ_0 für die beiden Instrumente um 10–20% voneinander abweichen. Die erzielbare Ablesegenauigkeit ist ja dann auch praktisch die gleiche.

Setzen wir die vorgeschlagenen Werte in Gl. (49) ein und multiplizieren wir den Nenner mit

$$\frac{1000 \text{ mm}}{\text{m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10^{-7} \text{ W s/erg}}}$$

so wird diese zahlenmäßig zu

$$\Sigma_{0s} = 1,24 \cdot 10^{-7} \frac{\alpha \sqrt{R_i + R_{gr}}}{E \cdot T} \sqrt{d_s^3} = 1,24 \cdot 10^{-7} \frac{\alpha}{I \sqrt{R_i + R_{gr}} T} \sqrt{d_s^3}. \quad (51)$$

Σ_{0s} hat die Dimension $\text{s}^{1/2}/\text{cm}$, wenn man mißt α in $\frac{\text{mm Ausschlag}}{\text{m Skalenabstand}}$; R in Ω ; E in V ; I in A ; d_s in cm und T in s.

Gelingt es z. B., ein Instrument mit $T = 1 \text{ s}$, $v = 1$ und $d_s = 1 \text{ cm}$ Spiegeldurchmesser so ideal zu bauen, daß es möglich ist, die durch Gl. (45) errechenbare Empfindlichkeit zu erzielen, so ist $\Sigma_{0s} = 1$. Wird bei $v = 1$ der Spiegeldurchmesser $d_s = 0,1 \text{ cm}$, so wird unter den gleichen Bedingungen $\Sigma_{0s} = 10$. Bei zehnmal kleinerem Spiegeldurchmesser und damit auch kleinerem Lichtzeiger ist das Instrument aber auch wirklich zehnmal besser, da es entsprechend unempfindlicher gegen störende Verdrehungen seines Gehäuses ist.

Vergrößert man die Schwingungsdauer auf 9 s, so wird bei $d_s = 1 \text{ cm}$ im Idealfall $\Sigma_{0s} = 3$; bei $d_s = 0,1 \text{ cm}$ wird $\Sigma_{0s} = 30$.

Vergleicht man nun Gl. (51) mit dem von anderen Autoren erwogenen Gütemaß Gl. (48), so läßt sich eine gewisse Ähnlichkeit erkennen. Es ist ja

$$\frac{\alpha}{I \sqrt{R_i + R_{gr}}} = \frac{\alpha \sqrt{R_i + R_{gr}}}{E} = \sqrt{S_i S_E}. \quad (52)$$

Multipliziert man dies mit $\sqrt{d_s^3}/T$, (Gl. (51)) so erhält man

$$\Sigma \sim \frac{\sqrt{S_i S_E} \sqrt{d_s^3}}{T}. \quad (53)$$

Hier hat also gegenüber Gl. (48) die Schwingungsdauer T ein anders Gewicht und es ist die Spiegelgröße in das Gütemaß mit einbezogen.

Nicht berücksichtigt werden können bei dem Gütemaß Gl. (49) und Gl. (51) die Freiheit der Rückstellfeder von elastischen Nachwirkungen und die Güte der Aufhängung, so daß das System frei von Nickschwingungen ist, (d. s. Schwingungen um eine Achse, die \perp zur Drehachse des

Systems verläuft). Die durch mangelhafte elastische Eigenschaften der Rückstellfedern hervorgerufenen elastischen Fehler (Hysteresis, elastische Nachwirkung) können aber auch in Prozent des jeweiligen Ausschlages direkt angegeben werden.

Aus der Gütezahl Σ_{0s} läßt sich die Leistungsempfindlichkeit leicht berechnen. Es gilt die Zahlenwertgleichung

$$S_{Ngs} = \frac{\alpha}{\sqrt{N_g}} = \Sigma_{0s} \cdot \frac{T}{\sqrt{d_s^3}} \cdot 8,13 \cdot 10^6 \quad (54)$$

in $\frac{\text{mm}}{\sqrt{W} \cdot \text{m Skalenabstand}}$, wenn man mißt Σ_{0s} in $s^{1/2} \text{cm}^{-1}$; T in s ; d_s in cm .

Daraus läßt sich die Spannungsempfindlichkeit berechnen. Sie ist als Zahlenwertgleichung

$$S_E = \frac{\alpha}{E} = \Sigma_{0s} \frac{T}{\sqrt{d_s^3}} \frac{8,13 \cdot 10^6}{\sqrt{R_i + R_{gr}}} \quad (55)$$

in $\frac{\text{mm}}{V \cdot \text{m Skalenabstand}}$, wenn man die übrigen Größen wie bei Gl. (54) mißt.

Ebenso erhält man die Stromempfindlichkeit nach der Zahlenwertgleichung

$$S_I = \frac{\alpha}{I} = \Sigma_{0s} \frac{T}{\sqrt{d_s^3}} 8,13 \cdot 10^6 \sqrt{R_i + R_{gr}} \quad (56)$$

in $\frac{\text{mm}}{A \cdot \text{m Skalenabstand}}$, wenn man die übrigen Größen wie bei Gl. (54) mißt.

Für den Benutzer eines Instrumentes ist aber auch von Interesse, wie groß $\iota_0 = \iota \cdot \eta_e$ (Gl. (20)) oder $\iota_{10} = \iota_1 \cdot \eta_e$ (Gl. (27)) gemacht werden und in welchen Grenzen es variiert werden kann. Damit kann die Anpassung des Galvanometers an verschiedene Außenwiderstände erreicht werden, wie aus den Gln. (17) sowie (24a) und (24b) zu ersehen ist.

Vom Hersteller eines Galvanometers müßten zur Kennzeichnung des Instrumentes demnach folgende Größen angegeben werden: Die Güteziffer Σ_{0s} , die Dauer einer ungedämpften Schwingung T , der Spiegeldurchmesser d_s , die Anpassungszahl $\iota_1 = \iota \eta_e$ bzw. $\iota_{10} = \iota_1 \eta_e$, der Innenwiderstand R_i und der grenzaperiodische Außenwiderstand R_{gr} . (Für $\eta_e = 1$ ist $\iota_0 \equiv \iota$.)

Für Galvanometer mit in Spannbändern gelagertem System und körperlichem Zeiger läßt sich eine Gütezahl mit demselben Aufbau aufstellen. In ihr wäre dann statt des Trägheitsmomentes des Spiegels das des Zeigers enthalten. Statt des Durchmessers d_s des Spiegels wäre in geeigneter Form als Parameter die Länge des Zeigers einzuführen.

Nun ein Wort zur Widerstands- und Leistungsanpassung und der sog. Klemmenempfindlichkeit eines Galvanometers. Es ist

$$S_E = \frac{\alpha}{E} = \frac{S_{Ng}}{\sqrt{R_i + R_{gr}}} \quad (57)$$

In [21], S. 18 ist definiert (mit den hier eingeführten Bezeichnungen)

$$S_E = \frac{\alpha}{E} = \frac{K \sqrt{R_i}}{R_i + R_a} \quad (58)$$

Aus Gl. (57) und (58) errechnet sich unter Zuhilfenahme von Gl. (17)

$$K = S_{Ng} \sqrt{\frac{R_i + R_a}{R_i}} = S_{Ng} \sqrt{\iota} \quad (59)$$

Das heißt, daß K nur konstant bleibt, solange die Anpassungszahl ι unveränderlich ist (siehe auch [21], S. 67).

Nach [21], S. 19 ist

$$S_E = \frac{\alpha}{E} = \frac{K}{2\sqrt{R_a}} \zeta, \quad (60)$$

wobei wieder unter Zuhilfenahme von Gl. (17)

$$\zeta = \frac{2}{\sqrt{R_a/R_i} + \sqrt{R_i + R_a}} = \frac{2}{\sqrt{\iota - 1} + \frac{1}{\sqrt{\iota - 1}}} \quad (61)$$

ist. ζ hat für $K = \text{const.}$ ein Maximum bei $\iota = 2$, d. h. nach Gl. (17) $R_i = R_a$. Nun ist aber nach Gl. (59) $K \neq \text{const.}$

Setzt man in Gl. (60) für K den in Gl. (59) gefunden Wert ein, so ist

$$S_E = \frac{\alpha}{E} = S_{Ng} \frac{\sqrt{\iota}}{\sqrt{\iota - 1} + \frac{1}{\sqrt{\iota - 1}}} \quad (62a)$$

$$= \frac{S_{Ng}}{\sqrt{R_i}} \frac{1}{\sqrt{\iota}}, \quad (62b)$$

das kein Extremum mehr liefert. Nun ist es physikalisch ohne Zuhilfenahme von Verstärkern unmöglich, $\iota < 1$ zu machen, da sich bei schlechter Widerstandsanpassung η_e von selbst verkleinert, so daß $\iota > 1$ bleibt. In beiden möglichen Fällen von Gl. (62) bleibt demnach der Ausdruck in ι kleiner als die Zahl 1, ob man nun in Gl. (62a) mit $\iota \rightarrow +\infty$ oder im Fall der Gl. (62b) mit $\iota \rightarrow +1$ ($\iota > 1$) geht.

Ist demnach R_a vorgegeben, so muß man ι möglichst groß wählen. Damit wird R_i zwangsläufig sehr klein. Hat man also ein für kleine Spannungen hochempfindliches Instrument zu bauen, so macht man zweckmäßig R_i so klein als möglich und ι möglichst groß, was auch schon zu der Gl. (24) festgestellt wurde. Die Gln. (62) liefern nahezu $\sqrt{2}$ mal so große Werte von S_E als Gl. (58) im nach [21] „optimalen“ Fall $\iota = 2$.

Das Gesetz der Widerstands- und Leistungsanpassung $R_i = R_a$ gilt demnach für Galvanometer nur solange, als man bei schnell schwingenden Systemen (bei Vibrations-Galvanometern) mit $\iota \leq 2$ (Gl. (18) und Gl. (27)) an der oberen Grenze des Möglichen angelangt ist, so daß $K = \text{const.}$

Für schnell schwingende Instrumente, welche ja zusätzlich mechanisch gedämpft werden müssen, empfiehlt es sich, wegen der schlechten Erfassbarkeit von η_e und weil oft eine sehr kleine Dämpfung erwünscht ist, eine andere Form der Angabe über ihre Empfindlichkeit zu wählen.

Es wird vorgeschlagen, die Empfindlichkeit von Vibrations-Galvanometern auf ein System mit 100 Hz ungedämpfter Resonanzfrequenz, einen Innenwiderstand von 1Ω und einer Spiegelfläche von $1 \cdot 1 \text{ mm}^2$ zu beziehen.

Auf Grund der obigen Überlegungen erscheint es zweckmäßig, diese Größen so miteinander in Beziehung zu setzen, daß die Leistungsempfindlichkeit (bezogen auf den Eigenverbrauch des Instrumentes), als „Normalempfindlichkeit“ definiert wird. In dieser Definition ist also enthalten, daß bei einem bestimmten Gleichstrom der Spannungsabfall am Instrument gleichzeitig möglichst klein ist oder umgekehrt, bei einem bestimmten Spannungsabfall am Instrument der Strom auch klein bleiben muß, wenn die „Normalempfindlichkeit“ einen großen Wert bekommen soll.

Man hat damit ein Maß für die Eigenverbrauchs-Empfindlichkeit eines Systems ähnlich dem der „Normal-Empfindlichkeit“, die DU BOIS und RUBENS [7] seinerzeit vorgeschlagen haben mit der Erweiterung, daß auch das Trägheitsmoment des Spiegels in die Rechnung mit eingeht.

Die Gleichstrom-Leistungsempfindlichkeit für Vibrations-Galvanometer sei bezeichnet mit S_{N100s} . Der Index N bedeutet die aufgenommene Leistung (bei optimaler Anpassung und vernachlässigbarer elektromagnetischer Rückwirkung ist sie gleich der in der Quelle verbrauchten), die Zahl 100 die Bezugnahme auf $f = 100 \text{ Hz}$ und s , daß es sich um ein System mit einem Spiegel

handelt, bei dem also der Ausschlagwinkel des Lichtzeigers doppelt so groß als der des beweglichen Systems ist. Die Dimensionen seien so gewählt, daß man der Größe entnehmen kann, wieviel mm Ausschlag ein Instrument erreichen würde bei 1 m Skalenabstand, 1 mA Strom, 1 Ohm Spulen-Widerstand, einer Spiegelgröße von $1 \times 1 \times 0,07 \text{ mm}^3$ und 100 Hz Resonanzfrequenz. (Bei der Normalempfindlichkeit von DU BOIS und RUBENS war die Empfindlichkeit auf ein System mit einer Schwingungsdauer von 10 s bei einem Strom von $1 \mu\text{A}$ mit einem Eigenwiderstand von 1 Ohm (also einem Leistungsverbrauch von 1 pW) und einem Lichtzeiger von 1 m Länge bezogen, wurde also gemessen in $\frac{\text{mm Ausschlag}}{\mu\text{A} \sqrt{\Omega} \cdot \text{m Skalenabstand}}$.)

Läßt man also den Einfluß von η außer acht, so geht nach Gl. (25) (Drehmagnetinstrument) oder Gl. (23) (Drehspulinstrument) die Empfindlichkeit mit dem Quadrat der Dauer einer vollen Schwingung bzw., was dasselbe ist, umgekehrt proportional dem Quadrat der ungedämpften Resonanzfrequenz. Ferner geht aus der genannten Gleichung hervor, daß die Empfindlichkeit umgekehrt proportional der Wurzel aus dem Trägheitsmoment des Spiegels Θ_s ist.

Der für das „Normal-Galvanometer“ vorgeschlagene Spiegel von etwa $1 \times 1 \times 0,07 \text{ mm}^3$ hat ein polares Trägheitsmoment von etwa $15 \cdot 10^{-8} \text{ gcm}^2$. Damit wird die vorgeschlagene „Normalempfindlichkeit für Vibrationsgalvanometer“ als Zahlenwertgleichung schließlich

$$S_{N100s} = \frac{\alpha}{I \sqrt{R_i}} \cdot \frac{1}{s} \left(\frac{f_0}{100} \right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_s}{15 \cdot 10^{-8}}} \quad (63)$$

in $\frac{\text{mm Ausschlag}}{\sqrt{\mu\text{W}} \cdot \text{m Skalenabstand}}$, wenn man mißt α in mm, I in mA, R_i in Ω ; s in m; f_0 in Hz; Θ_s in gcm^2 .

Bei Galvanometern mit einer Eigenfrequenz in der Größenordnung von 100 Hz und mehr ist die Induktivität der Antriebsspulen nicht mehr zu vernachlässigen, namentlich bei Systemen mit Weicheisenkern, wenn sie bei den genannten Frequenzen betrieben werden. Betreibt man ein derartiges Instrument in einer Röhrenschaltung als Oszillographen-Galvanometer, so interessiert im allgemeinen nur die induktive Gegenspannung, und es muß dafür gesorgt werden, daß in den Antriebsspulen der Strom erzwungen wird, die Röhrenschaltung also einen ausreichend hohen Innenwiderstand besitzt. Bei einer gegebenen Anordnung und vorgegebenem Wickelraum bleibt bekanntlich das Verhältnis von Eigenwiderstand R und Induktivität L konstant, also

$$\frac{R}{L} = \text{const} = v_L. \quad (64)$$

Demnach ist

$$L = \frac{R}{v_L}$$

und der induktive Widerstand bei der höchsten aufzuzeichnenden Frequenz ω_{\max} ist

$$\omega_{\max} L = \omega_{\max} \cdot \frac{R}{v_L}.$$

Also ist die „Blindleistungs-Empfindlichkeit“ eines derartigen Galvanometers analog Gl. (63) für die höchste zu oszillographierende Kreisfrequenz $\omega_{\max} = 2 \pi f$, wobei f in Hz gemessen wird

$$S_{NB100s} = \frac{\alpha}{I \sqrt{\omega_{\max} L}} \frac{1}{s} \left(\frac{f_0}{100} \right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_s}{15 \cdot 10^{-8}}} = \frac{\alpha}{I \sqrt{\omega_{\max} \cdot R/v_L}} \frac{1}{s} \left(\frac{f_0}{100} \right)^2 \sqrt{\frac{\Theta_s}{15 \cdot 10^{-8}}} \quad (65)$$

in $\frac{\text{mm}}{\sqrt{\mu\text{W}_B} \cdot \text{m Skalenabstand}}$, (der Index B bezieht sich auf die Blindleistung), wenn man alle Größen wie in Gl. (63) mißt.

Die vollständigen Angaben über ein Vibrationsgalvanometer müssen neben der Zahlenangabe über S_N demnach auch enthalten die Eigenfrequenz, Spiegelgröße, Widerstand, Induktivität und das Maß η für die Gesamtdämpfung des Systems.

Literatur

- [1] FISCHER, J.: Abriß der Dauermagnetkunde. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1949. — [2] NESBITT (EA Kelsall): Metals Technol. 13 (1946), S. 1973 ref. v. ADELSBERGER AEÜ 2 (1948) S. 38—40. — [3] J. Appl. Phys. 23 (1952) S. 1207—1211; Rev. Mod. Phys. 25 (1953), S. 306—309 ref. in Phys. Bl. 9 (1953), S. 420. — [4] MEISSNER, W., u. V. ADELSBERGER: Z. techn. Phys. 11 (1930) S. 102—107 u. 143—147; 13 (1932) S. 475—477; 14 (1933) S. 111—118. — [5] WÜHRSCMID: Theorie des Entmagnetisierungsfaktors und der Scherung von Magnetisierungskurven, Vieweg 1925. — [6] BECKER, Theorie der Elektrizität, Bd. I § 51. — [7] DU BOIS, H., u. H. RUBENS: Ann. d. Phys. 2 (1900) S. 84. Z. Instrumentenkde. 20 (1900) S. 65. — [8] ABBOTT: Astrophys. J. 18 (1903) S. 1—20. — [9] NICHOLS and WILLIAMS: Phys. Rev. 27 (1908) S. 250. — [10] VOLKMANN, Verh. d. dtsh. Phys. Ges. 13 (1911) S. 172—178. — [11] MAXWELL, A Treatise on Magnetism and Electricity, Vol. II, Art. 717—719. — [12] OBERDORFER: Lehrbuch der Elektrotechnik, 4. Aufl., Bd. II, S. 389—401. Berlin: Springer 1944. — [13] ISING, G., Phil. Mag. 7 (1926) S. 827—834. — [14] ZERNIKE, F., Z. Phys. 40 (1927), S. 628—636. — [15] VOLKMANN, W., Phys. Z. 12 (1911) S. 76. — [16] KLUMB, H., E. EBERHARD u. H. KERN: Z. angew. Phys. 3 (1951) S. 209—212. — [17] VOLKMANN: Physik Z. 12 (1911) S. 30. — [18] DU BOIS, H.: Ann. d. Phys. 83 (Jubilband) (1897) S. 348; 65 (1898); 2 (1900). — [19] WILLS, A. P.: Phys. Rev. 9 (1899) S. 193. — [20] ESMARCH, G.: Ann. Phys. 39 (1912) S. 1553. — [21] MEYER/MOERDER: Spiegelgalvanometer und Lichtzeigerinstrumente. Leipzig, Akademische Verlagsges. Geest & Portig 1952. — [22] ZÖLLICH, H.: ATM V 365—3, V 365—45 und 6, Wissensch. Veröff. aus d. Siemens Konzern 1 (1920) S. 524; 2 (1922) S. 378. — MOERDER: Z. angew. Phys. 1 (1949) H. 11, S. 502. — [23] WERNER, O.: Empfindliche Galvanometer. Leipzig/Berlin, de Gruyter 1928. — [24] NENNING, P.: Dissertation T.H. Karlsruhe 1958: Beitrag zur Theorie von Drehmagnet- und Drehspul-Galvanometern.

Dr.-Ing. P. NENNING, Fellbach bei Stuttgart, Kienbachstr. 11.

Leistungsbilanz und statische Stabilität der einphasigen elektrischen Welle

Von

A. K. GOSWAMI, Calcutta (Indien)

Mit 13 Textabbildungen

(Eingegangen am 8. Oktober 1958)

Übersicht. Es wird das stationäre Verhalten einer einphasigen elektrischen Welle aus zwei gleichen Drehstromasynchronmaschinen mit Schleifringläufern unter Verwendung der Methode der symmetrischen Komponenten untersucht.

Die Leistungsbilanz und die Stabilität einer Einphasenwelle unter Vernachlässigung der Dämpfung (statische Stabilität) werden behandelt und in eine Formel dafür abgeleitet. Ferner die daraus gewonnenen Rechen-
ergebnisse werden mit Meßwerten verglichen. Es wird festgestellt, daß sich die die Einphasenwelle im Still-
stand für Drehmomentübertragung mit Vorteil verwenden läßt.

Zusammenstellung der benutzten Bezeichnungen

U_N	Netzspannung (V)	L	$l(1 + \sigma) =$ Drehfeldinduktivität (H)
U_m, U_g, U_0	Spannung des Mit-, Gegen- und Null- systems (V)	l	Drehfeldhauptinduktivität (H)
j	$\sqrt{-1}$	l_σ	Streuinduktivität (H)
P	Polpaarzahl	n	Drehzahl (U/min)
ψ_γ	Verdrehungswinkel des Läufers der -ten Wellenmaschine in Richtung des Drehfeldes des Mitsystems ($\gamma = 1, 2$)	n_0	synchrone Drehzahl (U/min)
$\varphi_{10}, \varphi_{20}$	Gleichgewichtswerte ($^\circ$ el.)	s	Schlupf
δ	$P(\varphi_1 - \varphi_2) =$ gegenseitiger Verdre- hungswinkel der Läufer ($^\circ$ el.)	s_K	Kippschlupf der dreiphasigen Asyn- chronmaschine
$\dot{\varphi}_\gamma$	Winkelgeschwindigkeit des Läufers der γ -ten Wellenmaschine (s^{-1})	M	DrehmomenteinesWellenmotors(mkg)
$\ddot{\varphi}_\gamma$	Drehbeschleunigung des Läufers der γ -ten Wellenmaschine (s^{-2})	M_K	Kippmoment der dreiphasigen Asyn- chronmaschine (mkg)
m	Mitsystem	N_d	Drehfeldleistung einer Wellenma- schine (W)
g	Gegensystem	N'	Vom Netz aufgenommene Leistung eines Motors der Einphasenwelle (W)
o	Nullsystem	V' und V''	Ständer- und Läuferkupferverluste (W)
1	Wellenmaschine 1	N_m	abgegebene mechanische Leistung (W)
2	Wellenmaschine 2	N_s	abgegebene Wirkleistung an den Schleifringen (W)
$'$	Primärseite (Ständer)	N_{Gs}	gesamte vom Netz aufgenommene Leistung der einphasigen elektrischen Welle (W)
$''$	Sekundärseite (Läufer)	Ψ_γ	Winkelabweichungen von der Gleich- gewichtslage
J'_1	Primärstrom (Netzstrom) (A)	Θ	Trägheitsmoment (mkg s ²)
J_m, J_g	Strom des Mit- und Gegensystems (A)	Ω	Kreisfrequenz der ungedampften Schwingung (s^{-1})
$J_{\gamma re}, J_{\gamma im}$	reeller bzw. imaginärer Anteil des Pri- märnetzstromes der γ -ten Wellenma- schine (A)	N_{bs}	Schleifringblindleistung (bkW)
J''	Läuferstrom der einphasigen elektri- schen Welle (A)	N_b	Blindleistung (bkW)
σ', σ''	Ständer- bzw. Läufer-Streukoeffizient	N''_σ	Läuferblindstreuleistung (bkW)
σ	totaler Streukoeffizient	N'_σ	Statorstreuverluste (bkW)
R	ohmscher Widerstand (Ω)	f_b	berechnete Frequenz (Hz)
x_σ	Streublindwiderstand (Ω)	f_m	gemessene Frequenz (Hz)
x_l	Nutz-(Magnetisierungs-)blindwider- stand (Ω)		

I. Leistungsbilanz der einphasigen Welle

Für die behandelten Wellenmaschinen wurde der Leistungsfluß der Wirk- und Blindleistung für den Schlupfwert $s = 0,033$ ermittelt.

Wirkleistungsbilanz

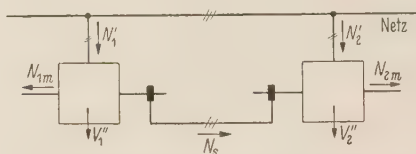


Bild 1. Wirkleistungsbilanz der einphasigen Welle.

Die dem Netz entnommenen Leistungen wurden aus der Stromortskurve nach $N' = U \cdot J_{Re}$ errechnet. Die mechanischen Leistungen N_m wurden aus den Drehmomenten $M d$ entsprechend der Beziehung $N_m = (1 - s) \cdot n_0 \cdot M d / 0,973$, wobei n_0 die synchrone Drehzahl ist. Die Kupferverluste V'' entsprechen dem Wert $3 \cdot R'' [|J_m''|^2 + |J_g''|^2]$. Die Schleifringleistung N_s wurde dann als $N_s = N' - N_m - V''$ von beiden Wellenmaschinen herkommend ermittelt. Die Übereinstimmung der beiden Werte bildet eine Kontrolle für die ermittelten Werte.

Blindleistungsbilanz

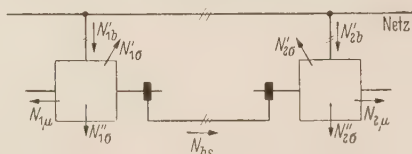


Bild 2. Blindleistungsbilanz der einphasigen Welle.

In Analogie zu der Wirkleistungsbilanz wurde die dem Netz entnommene Blindleistung N'_{1b} aus $N'_{1b} = U \cdot J'_{im}$ errechnet. Darauf wurden die Statorstreuverluste $N'_\sigma = 3 \cdot (|J'_m|^2 + |J'_g|^2) \cdot x'_\sigma$ die Magnetisierung $N_\mu = 3 \cdot (|U'_m|^2 + |U'_g|^2) / \omega L'$ und die Läuferblindstreuleistung $N''_\sigma = 3 \cdot [|J''_m|^2 \cdot x''_{\sigma m} + |J''_g|^2 \cdot x''_{\sigma g}]$ errechnet und von der aufgenommenen Blindleistung N_{1b} abgezogen. Somit erhält man die Blindleistung N_{bs} , die über die Schleifringe fließt. Die Rechnung wurde wiederum aus Kontrollgründen von beiden Maschinen heraus durchgeführt.

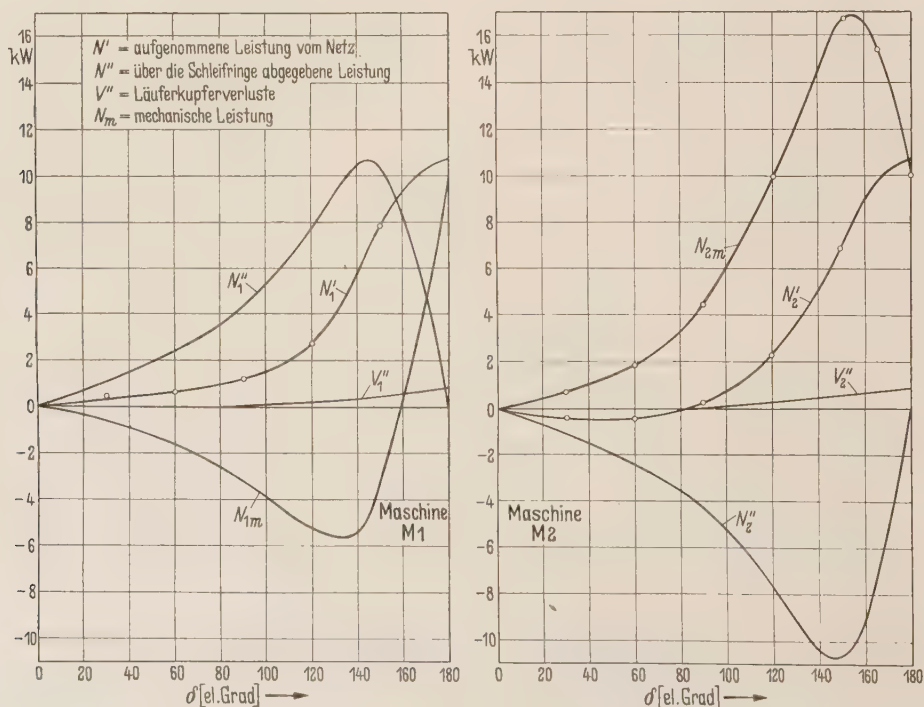
Bild 3. Wirkleistungsbilanz der Maschinen M_1 und M_2 über den Verdrehungswinkel δ' beim Schlupf $s = 0,033$.

Diagramme und Leistungsflußbilder

Die rechnerisch gefundenen Ergebnisse wurden in den Bildern 3 und 4 graphisch dargestellt. Zur Veranschaulichung des Leistungsflusses innerhalb der Maschine wurden für die 4 charakteristischen Fälle Leistungsflußbilder wiedergegeben (Bild 5).

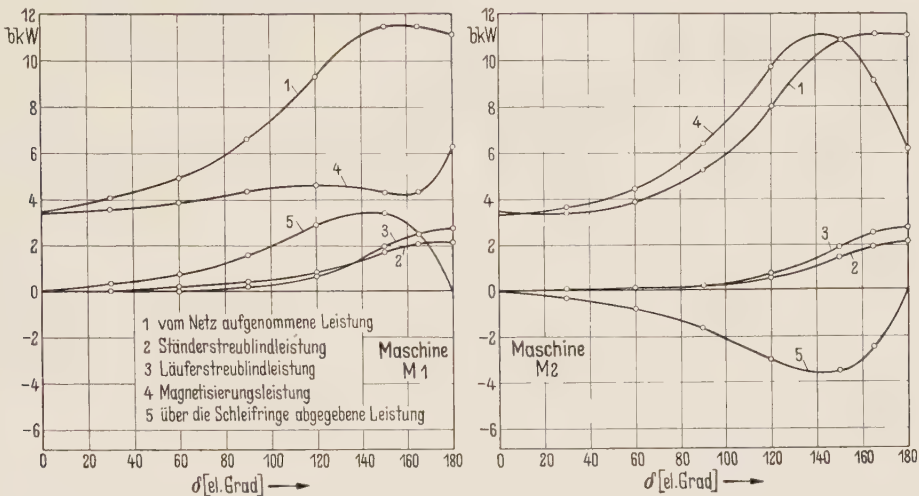


Bild 4. Blindleistungsbilanz der Maschinen M_1 und M_2 beim Schlupf $s = 0,033$.

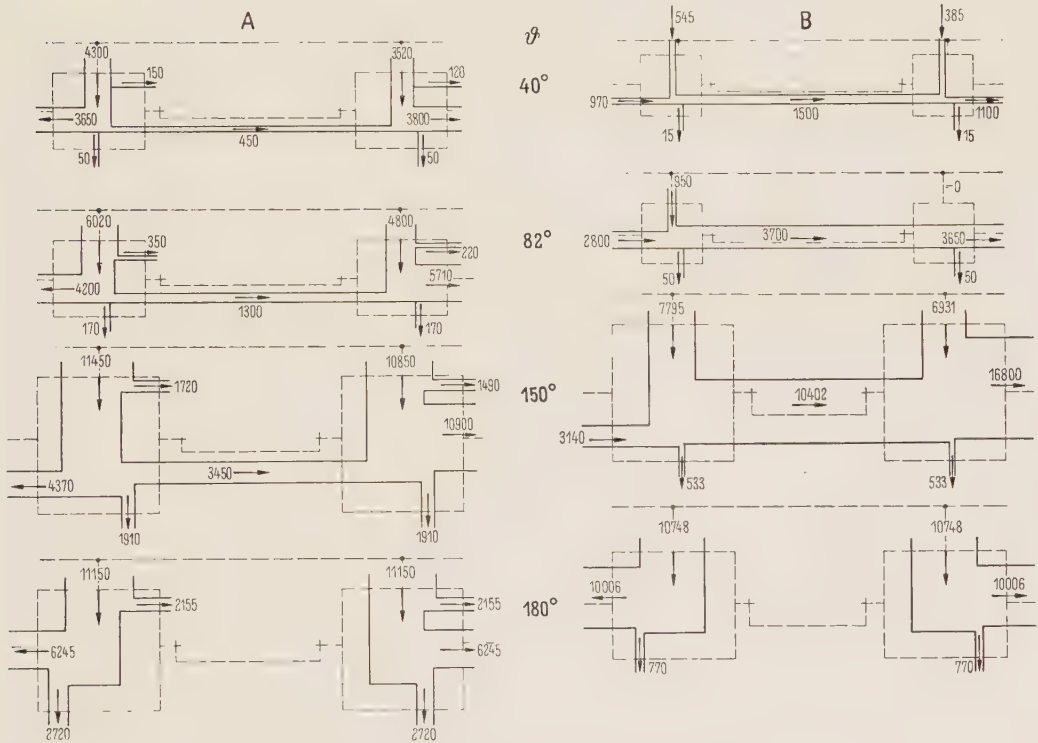


Bild 5. Leistungsfluß der einphasigen elektrischen Welle beim Schlupf $s = 0,033$.

II. Statische Stabilitätsgrenzen der Einphasenwelle

Unter Bezugnahme auf Bild 6 ergeben sich die Bewegungsgleichungen der durch eine Einphasenwelle verbundenen Antriebe zu:

$$\Theta_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = m_1 - l_1 + w_1 \quad \text{und} \quad \Theta_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = m_2 - w_2 + l.$$

(1)

Hierin sind ($\gamma = 1, 2$):

m_γ	die Drehmomente der Wellenmaschinen	(mkg)
l_γ	die Gegenmomente der Antriebe	(mkg)
w_γ	die Drehmomente der Motoren	(kmg)
Θ_γ	die Trägheitsmomente der Antriebe	(mkg s ²)
und $\ddot{\varphi}_\gamma \frac{d^2 \varphi_\gamma}{dt^2}$	die Drehbeschleunigungen der Antriebe	(s ⁻²)

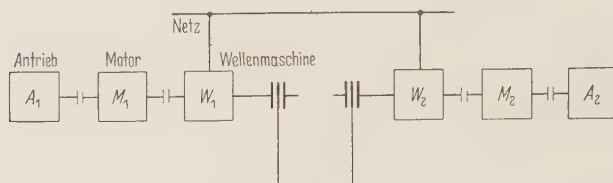


Bild 6. Schaltbild einer dreiphasigen elektrischen Ausgleichswelle mit zwei gleichen Schleifringläufermotoren W_1 und W_2 .

Die Drehmomente w_γ und l_γ ändern sich im allgemeinen nur mit dem Schlupf s , während die Drehmomente der Wellenmaschinen m_γ vom Schlupf s bzw. von der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_\gamma$ und vom Verdrehungswinkel φ_γ abhängen.

Unter der Voraussetzung kleiner Änderungen φ_γ und $\dot{\varphi}_\gamma$ lassen sich die Drehmomente m_γ , l_γ und w_γ nach TAYLOR wie folgt entwickeln:

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= M_1 + \left(\frac{dM_1}{d\varphi_1} \right)_0 \cdot \psi_1 + \left(\frac{dM_1}{d\varphi_2} \right)_0 \cdot \psi_2 + \left(\frac{dM_1}{d\dot{\varphi}_1} \right)_0 \cdot \dot{\psi}_1, \\ m_2 &= M_2 + \left(\frac{dM_2}{d\varphi_1} \right)_0 \cdot \psi_1 + \left(\frac{dM_2}{d\varphi_2} \right)_0 \cdot \psi_2 + \left(\frac{dM_2}{d\dot{\varphi}_2} \right)_0 \cdot \dot{\psi}_2, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$l_1 = L_1 + \left(\frac{dL_1}{d\dot{\varphi}_1} \right)_0 \cdot \dot{\psi}_1; \quad w_1 = W_1 + \left(\frac{dW_1}{d\dot{\varphi}_1} \right)_0 \cdot \dot{\psi}_1, \quad (3)$$

$$l_2 = L_2 + \left(\frac{dL_2}{d\dot{\varphi}_2} \right)_0 \cdot \dot{\psi}_2; \quad w_2 = W_2 + \left(\frac{dW_2}{d\dot{\varphi}_2} \right)_0 \cdot \dot{\psi}_2, \quad (4)$$

worin $\left(\frac{dM_\gamma}{d\dot{\varphi}_\gamma} \right)$, $\left(\frac{dL_\gamma}{d\dot{\varphi}_\gamma} \right)$ und $\left(\frac{dW_\gamma}{d\dot{\varphi}_\gamma} \right)$ physikalisch die Dämpfungswerte bedeuten.

Sind φ_{10} und φ_{20} die Verdrehungswinkel der Wellenmaschinen in der Gleichgewichtslage und ψ_1 , ψ_2 die Winkelabweichungen von den Gleichgewichtswerten, so ist

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{10} + \psi_1, & \dot{\varphi}_1 &= \dot{\varphi}_0 + \dot{\psi}_1, & \ddot{\varphi}_1 &= \ddot{\psi}_1, \\ \varphi_2 &= \varphi_{20} + \psi_2, & \dot{\varphi}_2 &= \dot{\varphi}_0 + \dot{\psi}_2, & \ddot{\varphi}_2 &= \ddot{\psi}_2. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Der stationäre Betrieb, d. h. die Gleichgewichtslage der Motoren ist durch $\psi_\gamma = 0$, $\dot{\psi}_\gamma = 0$ und $\ddot{\psi}_\gamma = 0$ gekennzeichnet.

Gl. (1) geht daher unter Verwendung der Gln. (2) bis (4) über in:

$$M_1 - L_1 + W_1 = 0 \quad \text{und} \quad M_2 - L_2 + W_2 = 0. \quad (6)$$

Aber

$$M_1 = -M_2 = -\frac{0,973}{n_0} \cdot \frac{U_N^2}{\omega L'} \cdot \frac{(1 - \sigma) \sin \delta}{[(1 + \sigma) + (1 - \sigma) \cos \delta]^2} \quad \text{mkg}.$$

Damit erhält man:

$$\frac{dM_1}{d\varphi_1} = \frac{dM_2}{d\varphi_2} = -\frac{dM_2}{d\varphi_1} = -\frac{dM_1}{d\varphi_2}. \quad (7)$$

Beschränkt man sich auf die statische Stabilität, so können die Glieder

$$\left(\frac{dM_\gamma}{d\dot{\varphi}_\gamma} \right)_0 \cdot \dot{\psi}_\gamma, \quad \left(\frac{dL_\gamma}{d\dot{\varphi}_\gamma} \right)_0 \cdot \dot{\psi}_\gamma \quad \text{und} \quad \left(\frac{dW_\gamma}{d\dot{\varphi}_\gamma} \right)_0 \cdot \dot{\psi}_\gamma$$

vernachlässigt werden.

Gl. (2) vereinfacht sich daher unter Berücksichtigung von Gl. (7) zu:

$$m_1 = M_1 + \frac{dM_1}{d\varphi_1} \cdot (\psi_1 - \psi_2) \quad \text{und} \quad m_2 = M_2 - \frac{dM_1}{d\varphi_1} \cdot (\psi_1 - \psi_2). \quad (8)$$

Mit diesen Werten lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\Theta_1 \cdot \ddot{\psi}_1 = \frac{dM_1}{d\varphi_1} \cdot (\psi_1 - \psi_2) \quad \text{und} \quad \Theta_2 \cdot \ddot{\psi}_2 = -\frac{dM_1}{d\varphi_1} \cdot (\psi_1 - \psi_2). \quad (9)$$

Man erhält bekanntlich die Lösungen dieser linearen homogenen Differentialgleichungen, wenn man den Exponentialansatz:

$$\psi_\nu = \Psi_\nu \cdot e^{\Omega t} \quad \gamma = 1, 2 \quad (10)$$

verwendet.

Damit geht die Gl. (9) über in:

$$\Theta_1 \cdot \Psi_1 \cdot \Omega^2 = \frac{dM_1}{d\varphi_1} \cdot (\Psi_1 - \Psi_2), \quad \Theta_2 \cdot \Psi_2 \cdot \Omega^2 = -\frac{dM_1}{d\varphi_1} \cdot (\Psi_1 - \Psi_2). \quad (11)$$

Endliche Werte $\Psi_1 \neq 0$ und $\Psi_2 \neq 0$ von Gl. (11) ergeben sich dann, wenn die Determinante verschwindet.

$$\begin{vmatrix} \left(\Theta_1 \cdot \Omega^2 - \frac{dM_1}{d\varphi_1} \right) & \frac{dM_1}{d\varphi_1} \\ \frac{dM_1}{d\varphi_1} & \left(\Theta_2 \cdot \Omega^2 + \frac{dM_1}{d\varphi_1} \right) \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Daraus folgt:

$$\Theta_1 \cdot \Theta_2 \cdot \Omega^2 - \frac{dM_1}{d\varphi_1} \cdot (\Theta_1 + \Theta_2) = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind:

$$\Omega = \pm j \sqrt{-\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{\Theta_1 \cdot \Theta_2} \cdot \frac{dM_1}{d\varphi_1}} \quad (s^{-1}). \quad (13)$$

Nach Gl. (13) wird also durch irgendeine Störung eine harmonische Schwingung hervorgerufen, wenn der Wert $dM_1/d\varphi_1$ negativ ist. Diese Schwingung klingt jedoch in Wirklichkeit bei positiver Dämpfung allmählich ab und die Einphasenwelle stellt sich wieder in die Gleichgewichtslage ein. Bei positiven Werten $dM_1/d\varphi_1$ nehmen dagegen die Auslenkungen ψ_ν nach Gl. (10) exponentiell zu, so daß die Einphasenwelle außer Tritt fällt. Hierbei wird jedoch von der Wirkung der Dämpfung abgesehen.

Wenn man in der Gl. (9) die Dämpfungen der Wellen- und Antriebsmotoren berücksichtigt, so erhält man die dynamischen Stabilitätsgrenzen der Einphasenwelle.

III. Versuchsergebnisse

Für die Messungen wurden zwei gleiche dreiphasige Schleifringläufermotoren (Polpaarzahl $p = 2$) mit folgenden Nenndaten verwendet:

11 kW, 220/380 V, Δ/Y , 40/23 A, $\cos \varphi = 0,83$, 1450 U/min, 50 Hz. Läufer: Δ , 190 V, 37 A, Nennmoment: 7,38 kgm, Schwungmoment: 1,066 kgm².

A. Leistungsbilanz im Stillstand

Im Stillstand der Einphasenwelle wird keine mechanische Leistung an der Welle abgegeben. Es treten nur die Verluste in den Maschinen auf. Da beide Motoren von derselben Type sind, verteilt sich die aufgenommene Leistung je Hälfte auf beide Maschinen.

Man erhält die von der Maschine W_1 aufgenommene Leistung zu:

$$N' (s = 1) = 2 J_1'^2 R' + 3 R'' (J_m''^2 + J_g''^2). \quad (14)$$

Da die Wicklungserwärmung bei den Stillstandsmessungen erheblich ist, wurden die ohmschen Widerstandswerte um 25% höher als die bei 20° C gemessenen angenommen. Die nach Gl. (14)

berechnete Leistungskennlinie ist in Bild 7 wiedergegeben. Für $0 < \delta < 90^\circ$ besteht eine konstante Abweichung zwischen den berechneten und den gemessenen Werten, die vorwiegend durch die Eisenverluste hervorgerufen wird.

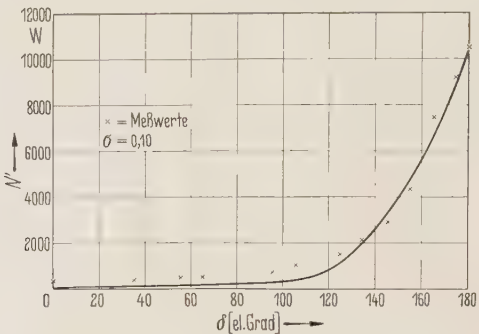


Bild 7. Primär aufgenommene Leistung einer Maschine der Einphasenwelle in Abhängigkeit vom Verdrehungswinkel ' δ ' (Stillstand).

IV. Oszillographische Untersuchungen

A. Ströme

Die Oszillogramme Bild 8 und 9 zeigen die Ständer- und Läuferströme der einphasigen bzw. der dreiphasigen elektrischen Welle im Stillstand bei gleichem Anzugsmoment (3,5 mkg). Daraus ist ersichtlich, daß die Ströme der einphasigen elektrischen Welle eine dritte Oberwelle enthalten, während der Einfluß dieser Oberwelle bei der dreiphasigen Welle sehr gering ist.

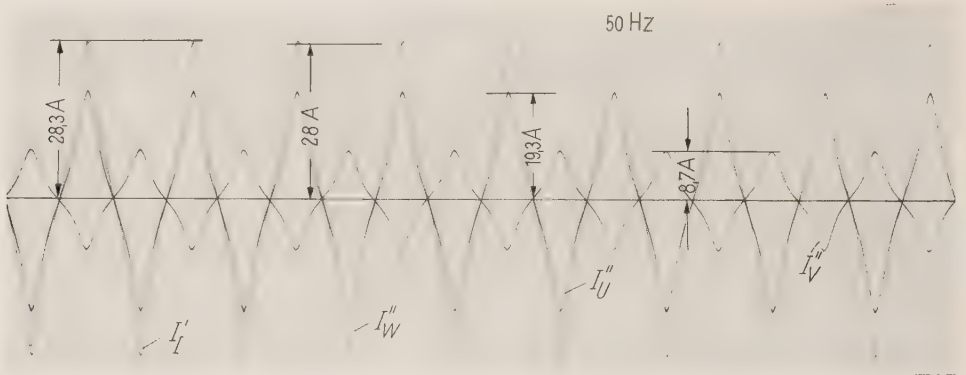


Bild 8. Ständer- und Läuferströme einer Einphasenwelle 380 V ∇ , 50 Hz, Anzugsmoment 3,5 mkg.

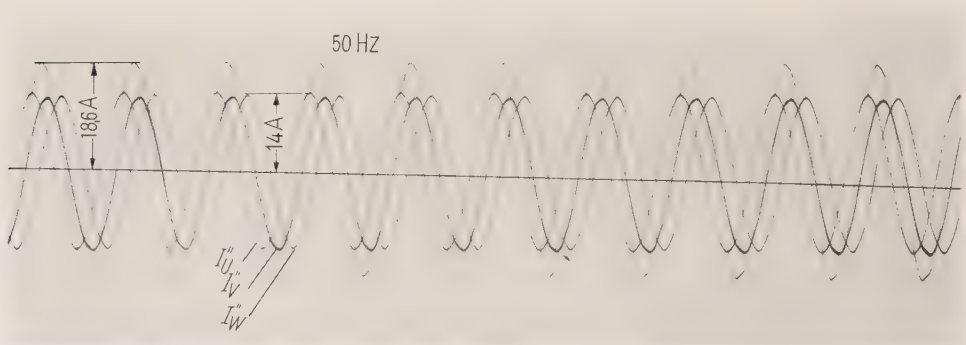


Bild 9. Ständer- und Läuferströme der dreiphasigen elektrischen Welle 380 V ∇ , 50 Hz, Anzugsmoment 3,5 mkg.

B. Experimentelle Nachprüfung der nach Gl. (13) beschriebenen Schwingung

Die Versuche wurden mit Nennspannung (380 V Y, 50 Hz) durchgeführt. Der Läufer der Wellenmaschine W_2 wird festgebremst ($\Theta_2 = \infty$). Die Kreisfrequenz Ω der durch eine Störung hervorgerufenen ungedämpften Schwingungen um die Gleichgewichtslage ist daher nach Gl. (13):

$$\Omega = \pm \sqrt{-\frac{1}{\Theta_1} \cdot \frac{dM_1}{d\varphi_1}} \quad (\text{s}^{-1}). \quad (15)$$

Die Frequenz der Pendelungen ist:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{1}{\Theta_1} \cdot \frac{dM_1}{d\varphi_1}}. \quad (16)$$

Oszillogramm Bild 10 zeigt Pendelungen der Einphasenwelle ohne Belastung (Schwingungen um die Nullage) bei 380 V Y, 50 Hz, 70° elektrische Anfangsverdrehung. Die oszillographisch gemessene Spannung eines Potentiometers (5 k^Ω bei Gleichspannung 220 V) ist dem Verdrehungswinkel φ_1 des Läufers verhältnismäßig. Oszillogramm Bild 11 zeigt die Pendelungen der Einphasenwelle beim Lastwinkel 80° elektr., wobei der Läufer der Maschine W_1 anfangs bis 108°

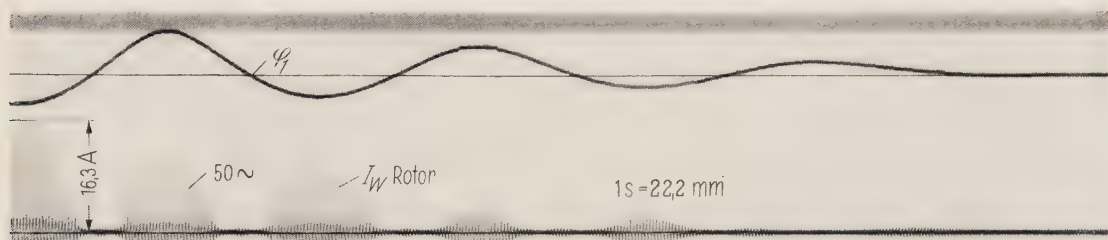


Bild 10. Pendelungen einer Einphasenwelle im Stillstand, um die Nullage 380 V Y, 50 Hz $\Theta_1 = 0,17184 \text{ kgm s}^2$, $\Theta_2 = \infty$; 70° elektrische Anfangsverdrehung des freien Motors mit dem Drehfeld.

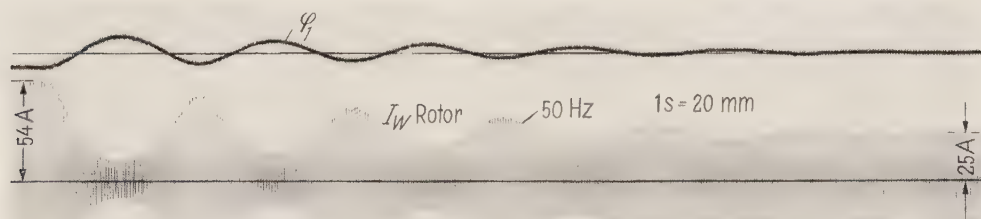


Bild 11. Pendelungen einer Einphasenwelle im Stillstand bei Belastung (3 mkg); 108° elektrische Anfangsverdrehung. ($\delta = 80^\circ$ elektr., $\Delta\delta = 28^\circ$ elektr.).

elektr. ($\Delta\delta = 28^\circ$ elektr.) verdreht wurde. Ein Hebelring ist an der Welle jeder Wellenmaschine angebaut, um das Anzugsmoment zu messen. Das Trägheitsmoment Θ_1 nach Gl. (16) setzt sich daher aus den Trägheitsmomenten der Wellenmaschine W_1 ($0,0272 \text{ kgm s}^2$) und des Hebelringes ($0,14464 \text{ kgm s}^2$) zusammen.

1. Schwingungen um die Nullage

$[\delta \text{ (Belastungswinkel)} = 0 \text{ und } \Delta\delta \text{ (Änderung des Belastungswinkels)} = 70^\circ]$.

Nach Einsetzen von $\delta = 0$ ergibt sich:

$$\frac{dM_1}{d\varphi_1} = -2,05,$$

$$\Theta_1 = 0,0272 + 0,14464 = 0,17184 \text{ kgm s}^2.$$

Die Frequenz der Pendelungen ist nach Gl. (16):

$$f_b = 0,55 \text{ Hz}.$$

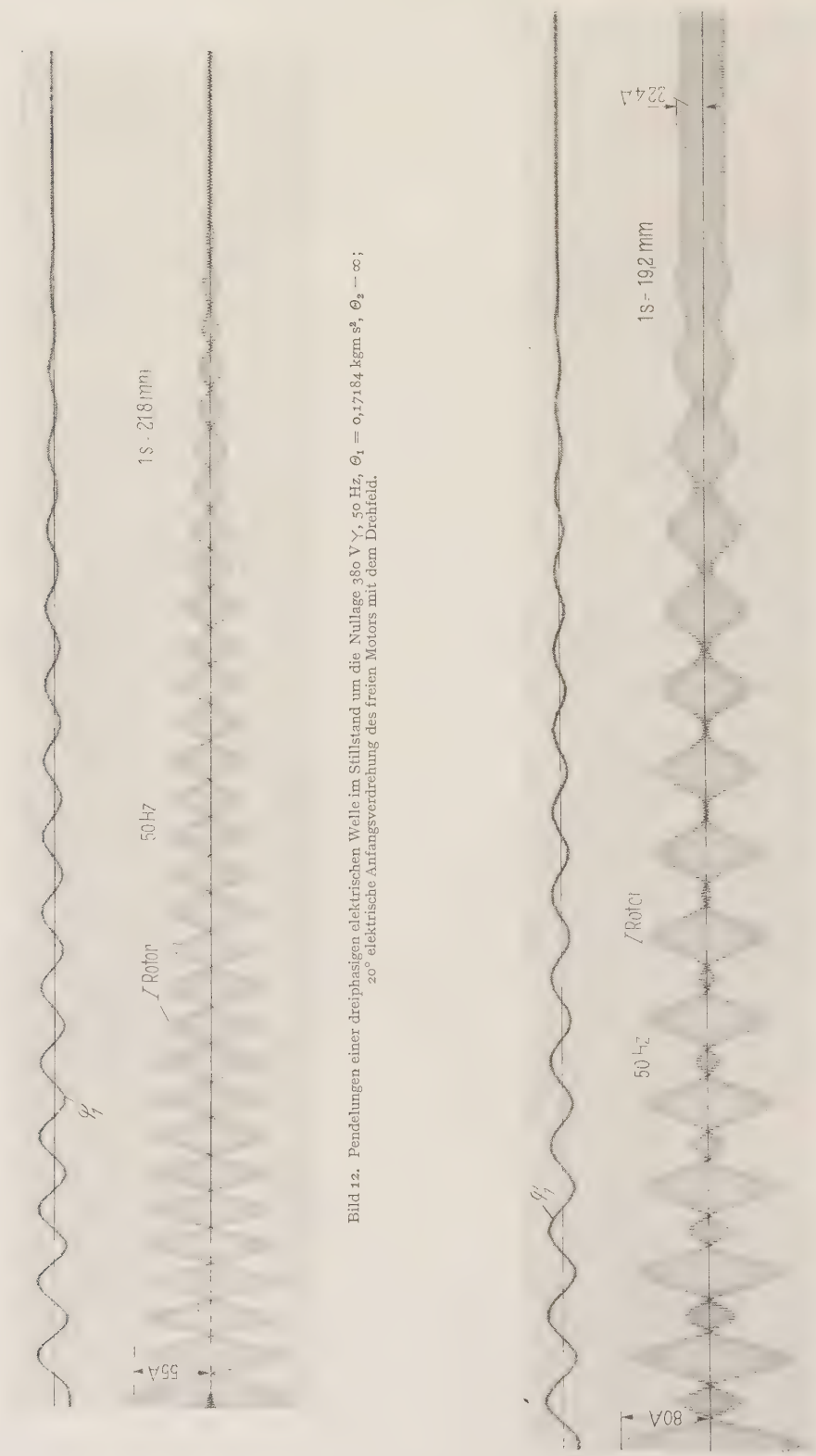


Bild 12. Pendelungen einer dreiphasigen elektrischen Welle im Stillstand um die Nulllage 380 V $\sqrt{3}$, 50 Hz, $\theta_1 = 0,47184 \text{ kgm s}^2$, $\theta_2 = \infty$; 20° elektrische Anfangsverdrehung des freien Motors mit dem Drehfeld.

Bild 13. Pendelungen einer dreiphasigen elektrischen Welle im Stillstand bei Belastung (3 mkg); 37° elektrische Anfangsverdrehung. ($\delta = 9^\circ$ elektr., $\Delta\delta = 28^\circ$ elektr.).

Aus dem Oszillogramm Bild 10 erhält man die Frequenz der Pendelungen zu:

$$\underline{f_m = 0,54 \text{ Hz} ,}$$

f_b = berechnete Frequenz in Hz ,

f_m = gemessene Frequenz in Hz .

2. Schwingungen um den Belastungswinkel 80° elektr.

$$(\delta = 80^\circ; \quad \Delta\delta = 28^\circ)$$

$$\frac{dM_1}{d\varphi_1} \quad \text{für} \quad \delta = 80^\circ = -8,90 .$$

Die Frequenz der Pendelungen ist nach Gl. (16):

$$\underline{f_b = 1,0 \text{ Hz} .}$$

Nach dem Oszillogramm Bild 11 beträgt die Frequenz der Pendelungen beim Belastungswinkel 80° elektr.:

$$\underline{f_m = 1,15 \text{ Hz} .}$$

C. Versuchsergebnisse der Pendelungen der dreiphasigen elektrischen Welle

Zum Vergleich wurde die Kreisfrequenz Ω_Y der ungedämpften Pendelungen der dreiphasigen elektrischen Welle bestehend aus denselben Drehstrommotoren nach folgender Gl. (4) berechnet.

$$\Omega_Y = \pm \sqrt{\frac{M_K \cdot P}{\Theta_1 \Theta_2} \cdot \frac{s^2}{s^2 + s_K^2} \left[(\Theta_1 + \Theta_2) \cos \delta + (\Theta_1 - \Theta_2) \frac{s_K}{s} \sin \delta \right]} . \quad (17)$$

Die Frequenz f_Y folgt daraus im Falle $\Theta_2 = \infty$ und $s = 1$ zu:

$$f_Y = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{M_K \cdot P}{\Theta_1} \cdot \frac{1}{1 + s_K^2} \cdot [\cos \delta - s_K \cdot \sin \delta]} . \quad (18)$$

Die Oszillogramme Bild 12 und 13 zeigen die Pendelungen um die Nullage ($\delta = 0$) bzw. mit Belastungswinkel 9° elektr. bei der dreiphasigen elektrischen Welle.

1. Schwingungen um die Nullage ($\delta = 0$, $\Delta\delta = 20^\circ$)

Nach Einsetzen von $\delta = 0$ erhält man aus Gl. (18):

$$\underline{f_{bY} = 2,43 \text{ Hz} .}$$

Das Oszillogramm Bild 12 liefert für die Frequenz der Pendelungen um die Nullage:

$$\underline{f_{mY} = 2,08 \text{ Hz} .}$$

2. Schwingungen um den Belastungswinkel 9° elektr.

$$(\delta = 9^\circ, \quad \Delta\delta = 28^\circ) .$$

Die Frequenz der Pendelungen ist nach Gl. (18):

$$\underline{f_{bY} = 2,4 \text{ Hz} .}$$

Nach Oszillogramm Bild 13 ist die Frequenz der Pendelungen:

$$\underline{f_{mY} = 1,64 \text{ Hz} .}$$

Wie aus den Oszillogrammen Bild 10 bis 13 ersichtlich ist, klingen die Pendelungen der dreiphasigen Welle im Stillstand langsamer ab, als die einer einphasigen Welle bei demselben Anzugsmoment und gleichem Winkel $\Delta\delta$ des Läufers des freien Motors. Die Pendelungen um die Nullage dauern etwas kürzere Zeit als Pendelungen unter Belastung bei beiden Schaltungen.

Literatur

- [1] FORTESCUE, I. C. L.: Method of symmetrical Coordinates. AIEE. Trans. 37, 2 (1918) S. 1027—1140. — [2] LUND, H.: Asynchronmaschine in Gleichlauf. Forschung und Technik, Berlin: Springer 1930. — [3] JORDAN, H.: Selbsterregte Pendelungen einer elektrischen Welle. Jahrb. d. AEG-Forschung, Bd. 7, S. 91—111 (1940). — [4] DIESNER, R.: Die elektrische Welle mit unsymmetrischen Ständerschaltungen, S. 8. — [5] KOVACS, K. P.: Pulsierendes Moment im asymmetrischen Betrieb von Wechselstrommaschinen. Arch. Elektrotechn. XLII (1955) S. 99—126. — [6] GOSWAMI, A. K.: Ermittlung der Drehmomente und Ströme der einphasigen elektrischen Welle, S. 15.

Dr. A. K. GOSWAMI, 6 H, Baniapara Lane, Calcutta-14 (Indien).

Die Stromverdrängung in Rohren und Koaxialleitern

Von

WOLFGANG HELD und KURT WENZEL

Siemens-Schuckertwerke AG, Dynamowerk, Berlin-Siemensstadt

Mit 20 Textabbildungen

(Eingegangen am 6. Dezember 1958)

Übersicht. Im folgenden wird in bekannter Weise mit Hilfe der MAXWELLSchen Gleichungen die Stromverdrängung für Rohre und besonders für Koaxialleiter für beliebige Frequenzen zahlenmäßig berechnet. Der Wirkwiderstandsbelag R und der induktive Widerstand ωL im Leiterinnern werden getrennt als Funktionen des Radienverhältnisses und der Frequenz in Kurven angegeben.

Diese Arbeit ist eine Ergänzung zu den bisher veröffentlichten Arbeiten, insbesondere zu den von mehreren Autoren angegebenen einfachen Näherungslösungen für sehr kleine und sehr große Frequenzen. Es ist damit für den gesamten Frequenzbereich eine schnelle zahlenmäßige Ermittlung der Wechselstromwiderstände und der Eindringtiefe möglich.

Einleitung

Bild 1 zeigt den Koaxialleiter im Querschnitt mit den Bezeichnungen der einzelnen Radien. Betrachtet werden nur stationäre sinusförmige Wechselstromgrößen.

Die folgenden Zeiger (Beträge sind Effektivwerte) bedeuten

\mathfrak{E} elektrische Feldstärke	I Gesamtstrom
\mathfrak{H} magnetische Feldstärke	κ elektrische Leitfähigkeit
\mathfrak{B} Induktion	μ Permeabilität
\mathfrak{G} elektrischer Strömungsvektor (Stromdichte)	ω Kreisfrequenz
	$m = \sqrt{\omega \kappa \mu}$ Frequenz- u. Materialfaktor

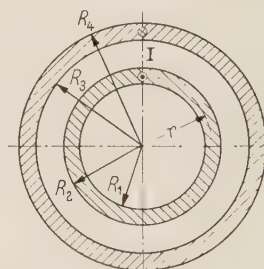


Bild 1.

1. Allgemeine Gleichungen für \mathfrak{G} und \mathfrak{H}

Bei Vernachlässigung des kapazitiven Verschiebungsstromes und bei sinusförmigem Wechselstrom konstanter Frequenz ergibt sich aus den MAXWELLSchen Gleichungen für den Strömungsvektor \mathfrak{G} im zylindrischen unendlich langen Leiter die bekannte BESSELSche Differentialgleichung [3].

$$\frac{d^2 \mathfrak{G}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \mathfrak{G}}{dr} - j m^2 \mathfrak{G} = 0 \quad (1)$$

mit der allgemeinen Lösung [10]

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{C}_1 J_0(m r \sqrt{-j}) + \mathfrak{C}_2 H_0^{(2)}(m r \sqrt{-j}). \quad (2)$$

Entsprechend $d\mathfrak{G}/dr = j m^2 \mathfrak{H}$ ergibt sich — (vgl. [3] u. [10]) —

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{j m} \{ \mathfrak{C}_1 [-\sqrt{-j} J_1(m r \sqrt{-j})] + \mathfrak{C}_2 [-\sqrt{-j} H_1^{(2)}(m r \sqrt{-j})] \}. \quad (3)$$

Die Konstanten \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C}_2 sind komplexe Größen. Sie werden durch die Randbedingungen festgelegt.

Für den Koaxialleiter gelten folgende Randbedingungen:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{für } r = R_1 & \text{ist } \mathfrak{H}_1 = 0, \\ \text{für } r = R_2 & \text{ist } \mathfrak{H}_2 = \frac{I}{2\pi R_2}, \end{array} \right\} \text{Innenleiter} \quad (4a)$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{für } r = R_3 & \text{ist } \mathfrak{H}_3 = \frac{I}{2\pi R_3}, \\ \text{für } r = R_4 & \text{ist } \mathfrak{H}_4 = 0. \end{array} \right\} \text{Außenleiter} \quad (4b)$$

Damit lassen sich nach Gl. (2) und Gl. (3) die Funktionen $\mathfrak{J}(r)$ und $\mathfrak{G}(r)$ berechnen. Dazu werden folgende Regeln zum Rechnen mit Zylinderfunktionen benötigt [4], [5]:

$$\frac{dJ_0(mr\sqrt{-j})}{dr} = -\sqrt{-j} m J_1(mr\sqrt{-j}), \quad \frac{dH_0^{(2)}(mr\sqrt{-j})}{dr} = -\sqrt{-j} m H_1^{(2)}(mr\sqrt{-j}).$$

In den Tabellen von JAHNKE-EMDE [4] findet man die folgenden Zylinderfunktionen von komplexem Argument tabelliert:

$$\sqrt{j} J_1(x\sqrt{j}), \quad \sqrt{j} H_1^{(1)}(x\sqrt{j}), \quad J_0(x\sqrt{j}), \quad H_0^{(1)}(x\sqrt{j})$$

und zwar getrennt nach Real- (\Re) - und Imaginär- (\Im) -teil. In den Gln. (2) und (3) tritt als Argument aber $x\sqrt{-j}$ auf. Es gelten nachstehende Umrechnungsformeln [9] (Querstrich bedeutet konjugiert komplexe Größe), die sich auch aus der Reihenentwicklung der BESSEL- und HANKEL-Funktionen (vgl. z. B. [5], S. 92 u. 97 und [4], S. 133) ergibt:

$$\left. \begin{aligned} J_0(x\sqrt{-j}) &= \overline{J_0(x\sqrt{j})}, & \sqrt{-j} J_1(x\sqrt{-j}) &= \overline{\sqrt{j} J_1(x\sqrt{j})}, \\ H_0^{(2)}(x\sqrt{-j}) &= \overline{H_0^{(1)}(x\sqrt{j})}, & \sqrt{-j} H_1^{(2)}(x\sqrt{-j}) &= \overline{\sqrt{j} H_1^{(1)}(x\sqrt{j})}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Mit Gl. (5) lassen sich die benötigten Funktionswerte (linke Seite) berechnen, indem das Vorzeichen des Imaginärteils der tabellierten Funktionen (rechte Seite) gewechselt wird. Zur Vereinfachung der Schreibweise werden noch folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= m R_1 \dots x_4 = m R_4, & x &= m r, \\ J_0(x\sqrt{-j}) &= b_0(x), & \sqrt{-j} J_1(x\sqrt{-j}) &= b_1(x), \\ H_0^{(2)}(x\sqrt{-j}) &= h_0(x), & \sqrt{-j} H_1^{(2)}(x\sqrt{-j}) &= h_1(x). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Mit den Randbedingungen Gl. (4a) ergeben sich für den Innenleiter aus Gl. (3) und Gl. (6) die Konstanten \mathfrak{C}_{1i} und \mathfrak{C}_{2i} :

$$0 = \frac{1}{j m} \{-\mathfrak{C}_{1i} b_1(x_1) - \mathfrak{C}_{2i} h_1(x_1)\}, \quad \frac{I}{2 \pi R_2} = \frac{1}{j m} \{-\mathfrak{C}_{1i} b_1(x_2) - \mathfrak{C}_{2i} h_1(x_2)\}. \quad (7)$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{C}_{1i} = \frac{I}{2 \pi R_2} m j \left\{ \frac{h_1(x_1)}{h_1(x_1) b_1(x_2) - h_1(x_2) b_1(x_1)} \right\}, \quad (8)$$

$$\mathfrak{C}_{2i} = -\frac{I}{2 \pi R_2} m j \left\{ \frac{b_1(x_1)}{h_1(x_1) b_1(x_2) - h_1(x_2) b_1(x_1)} \right\}. \quad (9)$$

Die Stromdichte im Innenleiter \mathfrak{G}_i ergibt sich mit diesen Konstanten als Funktion von $x = m r$ nach Gl. (2) zu

$$\mathfrak{G}_i = \mathfrak{C}_{1i} b_0(x) + \mathfrak{C}_{2i} h_0(x). \quad (10)$$

Zweckmäßig bezieht man die Stromdichte bei Wechselstrom \mathfrak{G}_i auf die Stromdichte bei Gleichstrom G_{0i} :

$$G_{0i} = \frac{I}{\pi (R_2^2 - R_1^2)} \quad (11)$$

und erhält dann

$$\frac{\mathfrak{G}_i}{G_{0i}} = j \frac{1}{2} m R_2 \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \left\{ \frac{h_1(x_1)}{h_1(x_1) b_1(x_2) - h_1(x_2) b_1(x_1)} \cdot b_0(x) + \frac{b_1(x_1)}{h_1(x_1) b_1(x_2) - h_1(x_2) b_1(x_1)} \cdot h_0(x) \right\}. \quad (12)$$

Mit den Randbedingungen Gl. (4b) für den Außenleiter ergeben sich nach Gl. (3) und Gl. (6) entsprechend

$$\mathfrak{C}_{1a} = -\frac{I}{2 \pi R_3} j m \frac{h_1(x_4)}{h_1(x_4) b_1(x_3) - h_1(x_3) b_1(x_4)}, \quad (13)$$

$$\mathfrak{C}_{2a} = \frac{I}{2 \pi R_3} j m \frac{b_1(x_4)}{h_1(x_4) b_1(x_3) - h_1(x_3) b_1(x_4)} \quad (14)$$

und nach Gl. (2) erhält man für den Außenleiter mit $G_{0a} = \frac{-I}{\pi (R_4^2 - R_3^2)}$ die Stromdichte bei Wechselstrom, bezogen auf G_{0a}

$$\frac{\mathfrak{G}_a}{G_{0a}} = j \frac{1}{2} m R_3 \left(\frac{R_4^2}{R_3^2} - 1 \right) \left\{ \frac{h_1(x_4)}{h_1(x_4) b_1(x_3) - h_1(x_3) b_1(x_4)} \cdot b_0(x) - \frac{b_1(x_4)}{h_1(x_4) b_1(x_3) - h_1(x_3) b_1(x_4)} \cdot h_0(x) \right\}. \quad (15)$$

2. Berechnung der Erhöhung des komplexen Widerstandes

Durch die Stromverdrängung erhöht sich der Gesamtwiderstand des Leiters. Die Widerstandserhöhung ist als das Verhältnis Wechselstrom- zu Gleichstromwiderstand definiert. Der Wechselstromwiderstand ergibt sich, wenn man den Spannungsabfall an derjenigen Leiteroberfläche, an der die magnetische Feldstärke nicht verschwindet, durch den Strom I dividiert. Das folgt, vgl. auch [7], aus dem POYNTINGschen Energiesatz in Verbindung mit dem GAUSSschen Satz. Dieser Spannungsabfall ist bei Wechselstrom nicht in Phase mit dem Strom:

$$\mathfrak{U} = U_{\text{real}} + j U_{\text{imag}} \quad \mathfrak{Z} = \frac{U_{\text{real}} + j U_{\text{imag}}}{I} = R + j \omega L. \quad (16)$$

Mit den Bezeichnungen

$\mathfrak{G}(R_2)$ Feldstärke bei Wechselstrom auf der Außenfläche des Innenleiters,
 $\mathfrak{G}(R_3)$ Feldstärke bei Wechselstrom auf der Innenfläche des Außenleiters,
 \mathfrak{G}_0 Feldstärke bei Gleichstrom,

$R_{0i} = \frac{l}{\pi \pi (R_2^2 - R_1^2)}$ Gleichstromwiderstand des Innenleiters,

$R_{0a} = \frac{l}{\pi \pi (R_4^2 - R_3^2)}$ Gleichstromwiderstand des Außenleiters,

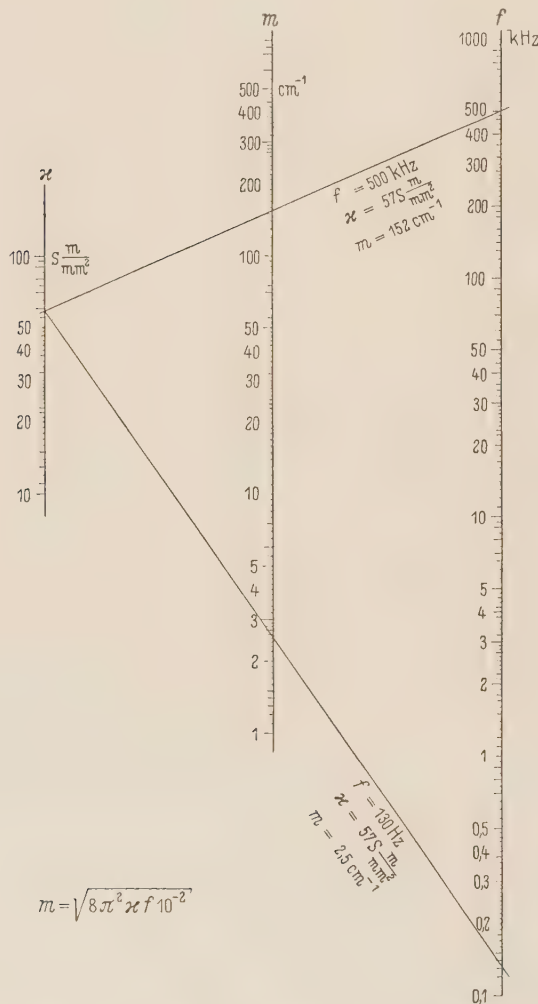


Bild 2. Nomogramm für den Material- und Frequenzfaktor m .

ergibt sich die Scheinwiderstandserhöhung

$$\left. \begin{aligned} \text{zu } \frac{\mathfrak{Z}_i}{R_{0i}} &= \frac{\mathfrak{G}(R_2)}{\mathfrak{G}_0} = \frac{\mathfrak{G}_i(R_2)}{G_{0i}} && \text{für den Innenleiter,} \\ \text{und } \frac{\mathfrak{Z}_a}{R_{0a}} &= \frac{\mathfrak{G}(R_3)}{\mathfrak{G}_0} = \frac{\mathfrak{G}_a(R_3)}{G_{0a}} && \text{für den Außenleiter.} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Mit Gl. (12) und $r = R_2$ bzw. Gl. (15) und $r = R_3$ kann aus dem Realteil die Wirkwiderstandserhöhung R_i/R_{0i} bzw. R_a/R_{0a} und aus dem Imaginärteil der induktive Anteil $\omega L_i/R_{0i}$ bzw. $\omega L_a/R_{0a}$ im Leiterinneren berechnet werden. L_i und L_a sind die Selbstinduktivitätsbeläge im Leiterinneren des Innen- und Außenleiters. Für diese ergibt sich:

$$L_i = \frac{\mu \Im \left[\frac{\mathfrak{G}_i(R_2)}{G_{0i}} \right]}{\pi (m R_2)^2 \left[1 - \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \right]}, \quad (18)$$

$$L_a = \frac{\mu \Im \left[\frac{\mathfrak{G}_a(R_3)}{G_{0a}} \right]}{\pi (m R_3)^2 \left[\left(\frac{R_4}{R_3} \right)^2 - 1 \right]}. \quad (19)$$

Um den gesamten Selbstinduktivitätsbelag zu erhalten, muß noch der Beitrag berücksichtigt werden, der vom magnetischen Feld im rohrförmigen Zwischenraum beigesteuert wird (s. Zahlenbeispiel).

Zahlenbeispiel

Die praktische Anwendung der allgemeinen Formeln wird an Hand des folgenden Zahlenbeispiels erläutert:

Zunächst entnimmt man dem Nomogramm (s. Bild 2) den Frequenz- und Materialfaktor m in $1/\text{cm}$. Alle Radien sind dann entsprechend in cm einzusetzen. Im Beispiel sei ein Koaxialleiter

aus Kupfer angenommen mit den Radien

$$\begin{aligned} R_1 &= 1,2 \text{ cm} , & R_3 &= 2,8 \text{ cm} , \\ R_2 &= 2 \text{ cm} , & R_4 &= 3,4 \text{ cm} , \\ & & \kappa &= 57 \text{ S } \frac{\text{m}}{\text{mm}^2} . \end{aligned}$$

Die Frequenz betrage 130 Hz.

Aus Bild 2 zu entnehmen: $m = 2,5 \text{ cm}^{-1}$.

Aus Gl. (6) ergibt sich

$$x_1 = 3,0 , \quad x_2 = 5,0 , \quad x_3 = 7,0 , \quad x_4 = 8,0 .$$

Nach Gl. (5) gilt z. B.

$$\mathfrak{b}_1(x_2) = \sqrt{-j} J_1(x_2 \sqrt{-j}) = \sqrt{j} J_1(x_2 \sqrt{j}) .$$

Aus den Tabellen von JAHNKE-EMDE [4] findet man für die rechte Seite

$$\begin{aligned} \Re \sqrt{j} J_1(5,0 \sqrt{j}) &= \Re \mathfrak{b}_1(5,0) = 3,845 , \\ \Im \sqrt{j} J_1(5,0 \sqrt{j}) &= -\Im \mathfrak{b}_1(5,0) = -4,354 . \end{aligned}$$

Daraus folgt die komplexe Konstante

$$\mathfrak{b}_1(5,0) = 3,845 + j 4,354 .$$

Entsprechend erhält man die anderen für Gln. (12) u. (15) benötigten komplexen Konstanten vgl. Zahlentafel 1).

Zahlentafel 1. Komplexe Konstanten (Berechnungsbeispiel)				
	$\mathfrak{b}_0(x)$	$\mathfrak{b}_1(x)$	$\mathfrak{b}_2(x)$	$\mathfrak{b}_3(x)$
$x_1 = 3,0$	—	$1,75 - j 0,881$	—	$0,0586 - j 0,0237$
$x_2 = 5,0$	$-6,23 + j 0,116$	$3,845 + j 4,354$	$-0,00712 - j 0,00733$	$-0,000522 - j 0,01095$
$x_3 = 7,0$	$-3,633 - j 21,239$	$-12,765 + j 16,041$	$-0,00172 + j 0,00122$	$-0,0022 + j 0,000268$
$x_4 = 8,0$	—	$-38,31 + j 7,66$	—	$-0,000851 + j 0,00056$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\mathfrak{b}_1(x_1)}{\mathfrak{b}_1(x_1) \mathfrak{b}_1(x_2) - \mathfrak{b}_1(x_2) \mathfrak{b}_1(x_1)} &= 1,98 - j 4,48 , & \frac{\mathfrak{b}_1(x_4)}{\mathfrak{b}_1(x_4) \mathfrak{b}_1(x_3) - \mathfrak{b}_1(x_3) \mathfrak{b}_1(x_4)} &= 0,00868 - j 0,00804 , \\ \frac{\mathfrak{b}_1(x_1)}{\mathfrak{b}_1(x_1) \mathfrak{b}_1(x_2) - \mathfrak{b}_1(x_2) \mathfrak{b}_1(x_1)} &= 0,105 - j 0,125 , & \frac{\mathfrak{b}_1(x_4)}{\mathfrak{b}_1(x_4) \mathfrak{b}_1(x_3) - \mathfrak{b}_1(x_3) \mathfrak{b}_1(x_4)} &= 161 - j 423 . \end{aligned}$$

Gl. (12) lautet nun

$$\frac{\mathfrak{G}_i}{G_{0i}} = -(0,20 + j 0,168) \cdot \mathfrak{b}_0(x) + (7,18 + j 3,17) \cdot \mathfrak{b}_0(x)$$

und Gl. (15)

$$\frac{\mathfrak{G}_a}{G_{0a}} = (0,0086 + j 0,0093) \mathfrak{b}_0(x) - (173 + j 454) \cdot \mathfrak{b}_0(x) .$$

Für das gewählte Beispiel erhält man für verschiedene Werte $x = m r$, (vgl. Zahlentafel 2).

Zu beachten ist noch, daß $\int \mathfrak{G} \, d\mathfrak{f} = I$ werden muß, also $\Re \int \mathfrak{G} \, d\mathfrak{f} = I$ und $\Im \int \mathfrak{G} \, d\mathfrak{f} = 0$, was sich bei zeichnerischer Integration nach Bild 3 mit genügender Genauigkeit auch ergibt.

Die komplexe Widerstandserhöhung beträgt nach Gl. (17) für unser Beispiel (s. Zahlen-
tafel 2):

$$\begin{aligned} \frac{R_i}{R_{0i}} &= 1,235, & \frac{\omega L_i}{R_{0i}} &= 0,96, & \frac{|\mathfrak{Z}_i|}{R_{0i}} &= 1,56, \\ \frac{R_a}{R_{0a}} &= 1,020, & \frac{\omega L_a}{R_{0a}} &= 0,352, & \frac{|\mathfrak{Z}_a|}{R_{0a}} &= 1,081. \end{aligned}$$

Gemäß Gl. (18) und Gl. (19) ist die Induktivität im Leiterinnern $L_i = 0,24$ nH/cm und $L_a = 0,094$ nH/cm. Zur Berechnung der Gesamtinduktivität des Koaxialleiters ist zu $L_i + L_a$ noch die Induktivität L_z im Isolationsraum zwischen den Rohren zu addieren. Diese beträgt be-
kanntlich

$$L_z = 2 \mu_r \ln \frac{R_3}{R_2} \quad \text{in} \quad \frac{\text{nH}}{\text{cm}} \quad (\mu_r = \text{relative Permeabilität}).$$

Als Gesamtinduktivität des Koaxialleiters erhält man für unser Beispiel

$$L = 1,01 \frac{\text{nH}}{\text{cm}}.$$

Nach Gl. (17) ergibt sich die Wirkwiderstandserhöhung R/R_0 aus dem Stromdichtenverhältnis
an den Leiteroberflächen, wo die magnetische Feldstärke nicht null wird. Anschaulicher folgt
 R/R_0 aus dem Verhältnis der gesamten Wirkverluste im Leiter

$$\frac{R}{R_0} = \frac{I^2 R}{I^2 R_0} = \frac{2\pi}{F} \int \left| \frac{\mathfrak{G}}{G_0} \right|^2 r dr.$$

Führt man diese Integration nach Bild 3 graphisch aus, so erhält man z. B. für den Innenleiter
 $R_i/R_{0i} = 1,25$, bei der groben Stufung in guter Übereinstimmung mit dem exakten Rechenwert
 $R_i/R_{0i} = \Re [\mathfrak{Z}_i(R_2)/G_{0i}] = 1,235$.

3. Die Funktionen R/R_0 und $\omega L/R_0$ bei verschiedenen Radienverhältnissen

Entsprechend dem Zahlenbeispiel wurden für verschiedene Rohre R_i/R_{0i} und $\omega L_i/R_{0i}$ als
Funktionen von $m \cdot R_2 = \sqrt{\omega \kappa \mu} \cdot R_2$ (R_1/R_2 als Parameter) und R_a/R_{0a} , $\omega L_a/R_{0a}$ als Funk-
tionen von $m \cdot R_4$ (R_3/R_4 als Parameter) berechnet und in den Bildern 4 bis 7 aufgetragen.

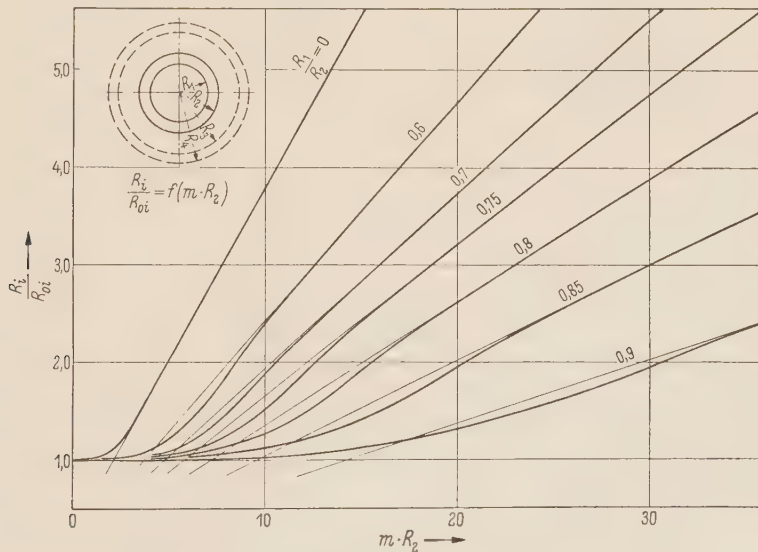


Bild 4. Wirkwiderstandserhöhung im Innenleiter.

Die Verhältnisse im Innenleiter sind vom Außenleiter völlig unabhängig, wie auch Gl. (12)
zeigt, in der R_3 und R_4 nicht vorkommen. Der Außenleiter braucht z. B. garnicht vorhanden
zu sein.¹

¹ Für Voll- und Rohrleiter allein hat schon DWIHT [1] R/R_0 mit einer Reihenentwicklung berechnet. Diese
Kurven stimmen mit Bild 4 gut überein.

Die Verhältnisse im Außenleiter sind von den Abmessungen des Innenleiters ebenfalls unabhängig, sofern der Innenleiter rund, koaxial und vom entgegengesetzt gleichen Strom

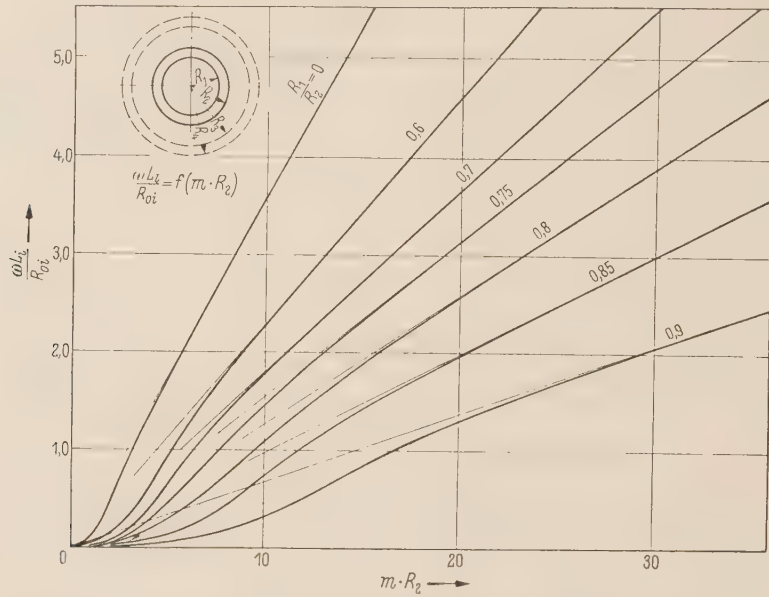


Bild 5. Innerer induktiver Widerstand bezogen auf den Gleichstromwiderstand im Innenleiter.

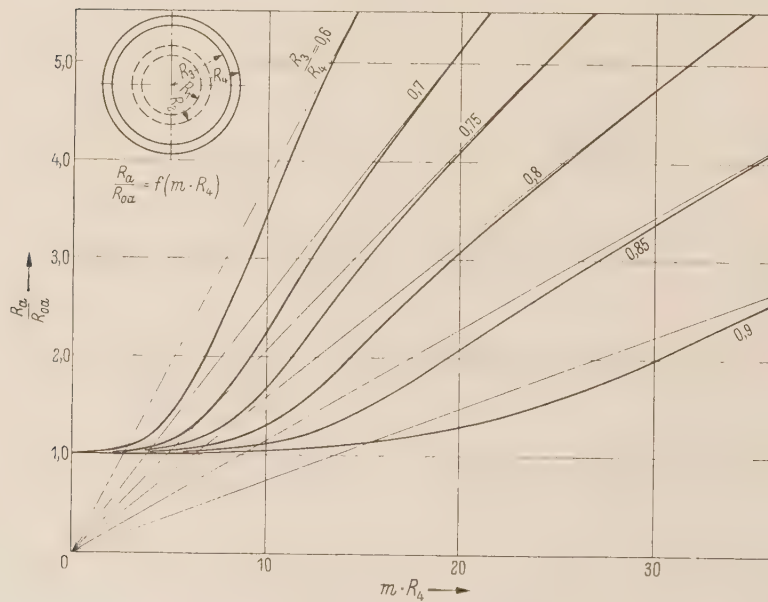


Bild 6. Wirkwiderstandserhöhung im Außenleiter.

durchflossen ist. Es folgt daraus, daß R_i/R_{0i} und $\omega L_i/R_{0i}$ ebenso wie für Koaxialleiter auch für Rohre und Volleiter allein gelten, vorausgesetzt daß die Rückleitung das Feld des Rohres oder Volleiters nicht beeinflußt.

Zur Berechnung der Stromverteilung im Innen- und Außenrohr entsprechend den Gln. (12) und (15) wurden noch für einige weitere Fälle die komplexen Konstanten \mathfrak{A} und \mathfrak{B} berechnet und in den Zahlentafeln 3 und 4 angegeben. \mathfrak{A} und \mathfrak{B} sind die Abkürzungen für:

$$\mathfrak{A}_i = j \left[\frac{b_1(x_1)}{b_1(x_1) b_1(x_2) - b_1(x_2) b_1(x_1)} \right], \quad \mathfrak{B}_i = j \left[\frac{b_1(x_1)}{b_1(x_1) b_1(x_2) - b_1(x_2) b_1(x_1)} \right],$$
$$\mathfrak{A}_a = j \left[\frac{b_1(x_4)}{b_1(x_4) b_1(x_3) - b_1(x_3) b_1(x_4)} \right], \quad \mathfrak{B}_a = j \left[\frac{b_1(x_4)}{b_1(x_4) b_1(x_3) - b_1(x_3) b_1(x_4)} \right].$$

(20)

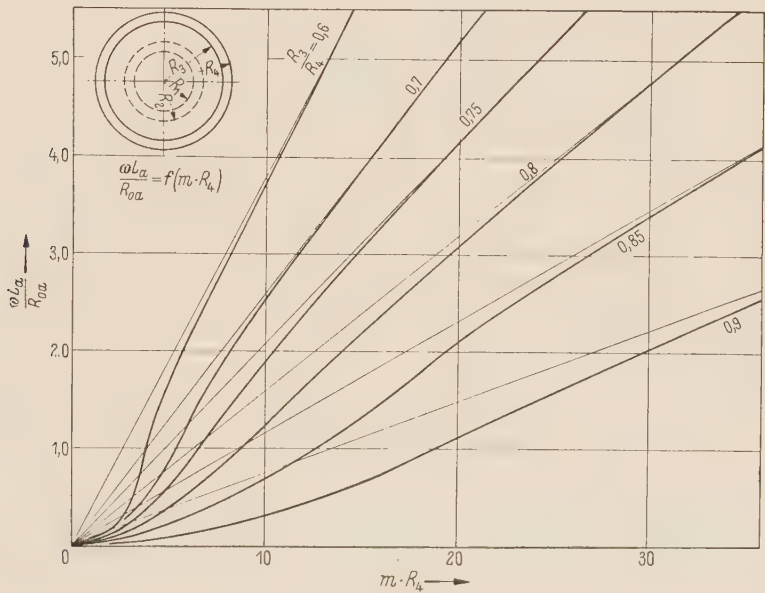


Bild 7. Innerer induktiver Widerstand bezogen auf den Gleichstromwiderstand im Außenleiter.

Zahlentafel 3. Komplexe Konstanten \mathfrak{A}_i und \mathfrak{B}_i für den Innenleiter

$m R_2$	R_1/R_2	\mathfrak{A}_i	\mathfrak{B}_i
10	0,6	$-0,0066 - j 0,00244$	$1,075 + j 13,7$
	0,7	$-0,0064 - j 0,00251$	$-50,7 + j 38,2$
	0,8	$-0,0062 - j 0,00220$	$-187,0 - j 167,3$
	0,9	$-0,0069 - j 0,00082$	$369,2 - j 104,8$
8	0,6	$0,00527 - j 0,0392$	$6,9 + j 7,5$
	0,7	$0,00505 - j 0,0246$	$-11,2 + j 28,4$
	0,8	$0,00293 - j 0,0238$	$-93,2 + j 15,8$
	0,9	$0,01122 - j 0,0059$	$53,2 - j 146,5$
6	0,6	$0,0882 + j 0,00452$	$5,25 + j 3,42$
	0,7	$0,0865 - j 0,00113$	$3,32 + j 3,31$
	0,8	$0,0883 - j 0,01302$	$-16,1 + j 31,7$
	0,9	$0,1092 - j 0,04460$	$-97,1 + j 53,7$
4	0,6	$0,0691 + j 0,281$	$3,56 + j 1,05$
	0,7	$0,0997 + j 0,291$	$5,275 + j 4,43$
	0,8	$0,1600 + j 0,312$	$6,59 + j 12,4$
	0,9	$0,3290 + j 0,413$	$44,7 + j 37,1$

Zahlentafel 4. Komplexe Konstanten \mathfrak{A}_a und \mathfrak{B}_a für den Außenleiter

$m R_4$	R_3/R_4	\mathfrak{A}_a	\mathfrak{B}_a
10	0,6	—0,000240 — j 0,000198	150 + j 140
	0,7	—0,000113 — j 0,000672	48,4 + j 445
	0,8	0,000284 — j 0,000942	—234 + j 696
	0,95	0,006030 — j 0,002990	—4070 + j 1730
8	0,6	0,00173 — j 0,00088	73, — j 6,4
	0,7	0,00374 — j 0,00038	128,2 + j 65,9
	0,8	0,00580 + j 0,00371	152,9 + j 215,5
	0,95	0,01790 + j 0,02562	266 + j 1168
6	0,6	0 00086 + j 0,0123	16,6 — j 21,8
	0,7	—0,00584 + j 0,0190	37,7 — j 23,3
	0,8	—0,01865 + j 0,0283	72,3 — j 19,7
	0,95	—0,10780 + j 0,1033	355 — j 14,1
4	0,6	—0,0698 — j 0,0166	—2,33 — j 8,75
	0,7	—0,0984 — j 0,0428	—1,11 — j 13,53
	0,8	—0,1506 — j 0,0908	1,085 — j 22,10
2	0,6	0,103 — j 0,437	—2,99 — j 0,814
	0,7	0,260 — j 0,622	—4,10 — j 1,913
	0,8	0,448 — j 0,988	—6,48 — j 3,280
1	0,6	1,283 — j 0,696	—1,472 — j 0,145
	0,7	2,015 — j 0,387	—1,909 — j 0,818
	0,8	3,070 — j 1,586	—3,466 — j 0,412

4. Stromverdrängung in Rohr- und Koaxialleitern bei großen Werten $x = m r$. Asymptotische Näherungen

Die Bilder 4 bis 7 zeigen, daß sich die Werte R/R_0 und $\omega L/R_0$ für große $m r$ rasch ihren Asymptoten nähern. Für Rund- und Rohrleiter (und entsprechend für den Innenleiter des Koaxialleiters) hat DWIGHT [1] die folgenden Formeln angegeben:

$$\frac{R_i}{R_{0i}} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} m R_2 + \frac{1}{4} \right) \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right), \quad (21)$$

$$\frac{\omega L_i}{R_{0i}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} m R_2 \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right). \quad (22)$$

Entsprechende Formeln ergeben sich auch für den Außenleiter des Koaxialleiters, wenn man von den Näherungslösungen der Zylinderfunktionen für große x ausgeht [5]:

$$\left. \begin{aligned} J_0(x\sqrt{-j}) &= \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{j\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)}, & J_1(x\sqrt{-j}) &= \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}}{j\sqrt{2\pi x}} \cdot e^{j\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8}\right)}, \\ H_1^{(2)}(x\sqrt{-j}) &= -\frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \cdot e^{-j\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)}, & H_0^{(2)}(x\sqrt{-j}) &= \frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}}{j\sqrt{\frac{1}{2}\pi x}} \cdot e^{-j\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8}\right)}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Man setzt nun die Gln. (23) unter Beachtung der Abkürzungen Gl. (6) in Gl. (15) ein und erhält nach einfacher Zwischenrechnung

$$\frac{R_a}{R_{0a}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} m R_3 \left[\frac{R_4^2}{R_3^2} - 1 \right] \frac{\Im \sin 2\varrho - \cos 2\alpha}{\Re \sin 2\varrho - \sin 2\alpha} \quad (24)$$

und

$$\frac{\omega L_a}{R_{0a}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} m R_3 \left[\frac{R_4^2}{R_3^2} - 1 \right] \frac{\operatorname{Si} 2\varrho + \cos 2\alpha}{\operatorname{Co} 2\varrho - \sin 2\alpha} \quad (25)$$

mit

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{2}} m (R_4 - R_3) \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} m (R_4 - R_3) + \frac{\pi}{4}.$$

Die Gln. (24) und (25) geben für $m r > 10$ praktisch genügend genaue Werte der Widerstandserhöhung im Außenleiter. Wird $\varrho > 4$, dann gilt $\operatorname{Si} 2\varrho \approx \operatorname{Co} 2\varrho \approx \frac{1}{2} e^{2\varrho}$. Die Größen $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ können gegenüber den um mehr als 10^3 größeren Hyperbelfunktionen vernachlässigt werden. Die Kurven der Widerstandserhöhung gehen dann in ihre Asymptoten über und es gilt:

$$\frac{R_a}{R_{0a}} = \frac{\omega L_a}{R_{0a}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} m R_3 \left[\frac{R_4^2}{R_3^2} - 1 \right]. \quad (26)$$

Mit den Gln. (15) und (23) ergibt sich im Asymptotenbereich auch für die Stromverteilung im Außenrohr eine einfache Formel.

Mit $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} m (R_4 - r)$ erhält man:

$$\frac{\mathfrak{G}_a}{G_{0a}} = \frac{1}{2} m R_3 \left[\frac{R_4^2}{R_3^2} - 1 \right] \sqrt{\frac{R_3}{r}} \left[\frac{e^{-\xi} \cdot e^{-j\left(\xi + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{\xi} \cdot e^{j\left(\xi - \frac{\pi}{4}\right)}}{e^{\varrho} \cdot e^{j\left(\varrho - \frac{\pi}{4}\right)} - e^{-\varrho} \cdot e^{j\left(\varrho + \frac{\pi}{4}\right)}} \right] \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right). \quad (27)$$

Für große ϱ und ξ verschwinden $e^{-\varrho}$ und $e^{-\xi}$ und Gl. (27) vereinfacht sich zu

$$\frac{\mathfrak{G}_a}{G_{0a}} = \frac{1}{2} m R_3 \left[\frac{R_4^2}{R_3^2} - 1 \right] \sqrt{\frac{R_3}{r}} \cdot e^{-\left[\varphi_a + j\left(\varphi_a - \frac{\pi}{4}\right)\right]} \quad (28)$$

mit

$$\varphi_a = \frac{1}{\sqrt{2}} m R_3 \left(\frac{r}{R_3} - 1 \right).$$

In gleicher Weise erhält man für den Innenleiter:

$$\frac{\mathfrak{G}_i}{G_{0i}} = \frac{1}{2} m R_2 \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right) \sqrt{\frac{R_2}{r}} e^{-\left[\varphi_i + j\left(\varphi_i - \frac{\pi}{4}\right)\right]} \quad (29)$$

mit

$$\varphi_i = \frac{1}{\sqrt{2}} m R_2 \left(1 - \frac{r}{R_2} \right).$$

Die Beträge von Gl. (28) und Gl. (29) ergeben die Stromverteilung im Außen- und Innenleiter:

$$\left| \frac{\mathfrak{G}_a}{G_{0a}} \right| = \frac{1}{2} m R_3 \left[\frac{R_4^2}{R_3^2} - 1 \right] \sqrt{\frac{R_3}{r}} \cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} m R_3 \left(\frac{r}{R_3} - 1 \right)}, \quad (30)$$

$$\left| \frac{\mathfrak{G}_i}{G_{0i}} \right| = \frac{1}{2} m R_2 \left[1 - \frac{R_1^2}{R_2^2} \right] \sqrt{\frac{R_2}{r}} \cdot e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} m R_2 \left(1 - \frac{r}{R_2} \right)}. \quad (31)$$

Die Phasenlage zum Gesamtstrom ist durch den Winkel $\frac{\pi}{4} - \varphi$ gegeben. Ein Maß für die Stromverdrängung ist die Eindringtiefe ϑ , das ist die Tiefe unter der Leiteroberfläche, wo die Stromdichte auf den $1/e$ -ten Teil ihres Oberflächenwertes abgeklungen ist.

Entsprechend Gl. (30) u. Gl. (31) ergibt sich

$$\vartheta = \frac{\sqrt{2}}{m}. \quad (32)$$

Mit den Näherungslösungen wird nun noch ein Zahlenbeispiel durchgerechnet.

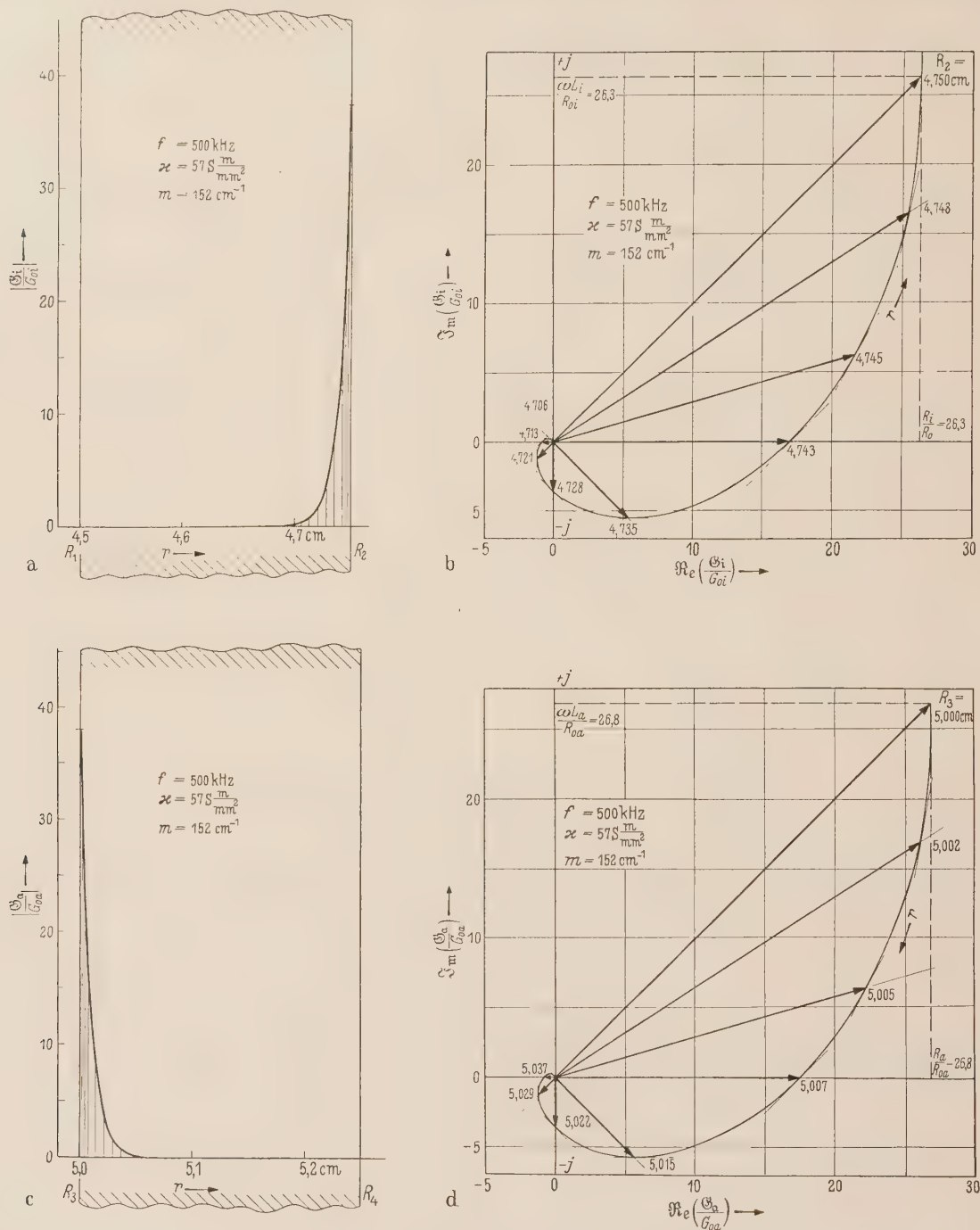


Bild 8 a. Radiale Stromverteilung im Innenleiter (Beträge von \mathcal{G}_i/G_{0i}).
 8b. Ortskurve der Stromverteilung im Innenleiter.
 8c. Radiale Stromverteilung im Außenleiter (Beträge von \mathcal{G}_a/G_{0a}).
 8d. Ortskurve der Stromverteilung im Außenleiter.

Der Koaxialleiter aus Kupferrohren habe folgende Abmessungen:

$$R_1 = 4,5 \text{ cm}, \quad R_2 = 4,75 \text{ cm}, \quad R_3 = 5 \text{ cm}, \quad R_4 = 5,25 \text{ cm}.$$

Die Frequenz betrage 500 kHz. Aus Bild 1 ergibt sich mit $\kappa = 57 \text{ S/mm}^2$ ein Frequenz- und Materialfaktor $m = 152 \text{ cm}^{-1}$. Aus den Gln. (28) und (29) folgt:

Zahlentafel 5. Stromverteilung im Innen- und Außenleiter (Berechnungsbeispiel)

Innenleiter				Außenleiter			
φ_i	$\pi/4 - \varphi_i$	r cm	$ \mathcal{G}_i/G_{0i} $	φ_a	$\pi/4 - \varphi_a$	r cm	$ \mathcal{G}_a/G_{0a} $
0,00	$\pi/4$	4,750 = R_2	37,2	0,00	$\pi/4$	5,000 = R_3	38,0
0,20	0,585	4,748	30,4	0,20	0,585	5,002	31,1
0,50	0,285	4,745	22,6	0,50	0,285	5,005	23,1
$\pi/4$	0	4,743	17,1	$\pi/4$	0	5,007	17,4
$\pi/2$	— $\pi/4$	4,735	7,8	$\pi/2$	— $\pi/4$	5,015	7,9
$3\pi/4$	— $\pi/2$	4,728	3,5	$3\pi/4$	— $\pi/4$	5,022	3,6
π	— $3\pi/4$	4,721	1,6	π	— $3\pi/4$	5,029	1,6
$5\pi/4$	— π	4,713	0,7	$5\pi/4$	— π	5,037	0,8
$6\pi/4$	— $5\pi/4$	4,706	0,3	$6\pi/4$	— $5\pi/4$	5,044	0,3
$7\pi/4$	— $6\pi/4$	4,699	0,2	$7\pi/4$	— $6\pi/4$	5,051	0,2
2π	— $7\pi/4$	4,692	0,1	2π	— $7\pi/4$	5,059	0,1

Bild 8 zeigt die radiale und zeitliche Stromverteilung im Innen- und im Außenleiter. Die Ortskurve der Stromverteilung ist eine logarithmische Spirale, wie es auch die Gln. (28) und (29) zeigen, da $\sqrt{R_2/r}$ und $\sqrt{R_3/r}$ in unserem Beispiel praktisch 1 ist.

Die komplexe Widerstandserhöhung ergibt sich entsprechend den Gln. (21), (22) und (26) aus dem Real- und Imaginärteil der Stromverteilung an den Stellen R_2 bzw. R_3

$$\frac{R_i}{R_{0i}} = \frac{\omega L_i}{R_{0i}} = 26,3, \quad \frac{R_a}{R_{0a}} = \frac{\omega L_a}{R_{0a}} = 26,8.$$

Zusammenfassung

Für runde Voll- und Rohrleiter und für Koaxialleiter wird die Stromverdrängung exakt berechnet. Es wird in bekannter Weise von den MAXWELLSchen Gleichungen ausgegangen, die für den Strömungsvektor \mathcal{G} und die magnetische Feldstärke \mathcal{H} zu Differentialgleichungen vom BESSELtyp führen. Unter Beachtung der Randbedingungen ergeben sich für Innen- und Außenleiter die Gleichungen (12) und (15), die die Stromverteilung \mathcal{G}/G_0 in Abhängigkeit von $r \cdot \sqrt{\omega \kappa \mu}$ und den Radien R_1, R_2, R_3, R_4 angeben. Die auftretenden BESSEL- und HANKEL-funktionen vom Argument $x\sqrt{j}$ können z. B. den Tabellen von JAHNKE-EMDE [4] entnommen werden. Unter Berücksichtigung des POYNTINGSchen Energiesatzes werden außerdem die komplexe Widerstandserhöhung $R/R_0 + j \cdot \omega L/R_0$ [s. Gl. (17)] berechnet. Für große Werte $r \cdot \sqrt{\omega \kappa \mu}$ werden in Ergänzung zu den bereits bekannten DWIGHTschen Asymptotenformeln für den runden Voll- und Rohrleiter [s. Gln. (21) u. (22)] auch für den Außenleiter Näherungslösungen für Stromverteilung und Widerstandserhöhung [s. Gln. (24) bis (26) und (28) bis (31)] angegeben.

In den Bildern 4 bis 7 sind der Wirkwiderstand und der innere induktive Widerstand bezogen auf den Gleichstromwiderstand über $r\sqrt{\omega \kappa \mu}$ bei verschiedenen Radienverhältnissen aufgetragen. Durch Interpolation können R/R_0 und $\omega L/R_0$ auch für beliebige Zwischenwerte der Radienverhältnisse ermittelt werden. Zur Erläuterung werden einige Zahlenbeispiele vollständig durchgerechnet, außerdem sind die komplexen Konstanten zur exakten Berechnung der Stromverteilung für eine größere Anzahl von Kombinationen $m r, R_1/R_2$ u. R_3/R_4 zahlenmäßig ausgerechnet worden.

Literatur

- [1] DWIGHT: Amer. Inst. of Electr. Eng. 37/II (1918) S. 1379. — [2] GRÜNWALD: Arch. Elektrotechn. 26 (1932) S. 513. — [3] OBERDORFER: Lehrbuch der Elektrotechnik, Bd. 1, S. 401. München-Berlin: R. Oldenbourg 1939. — [4] JAHNKE-EMDE: Tafeln höherer Funktionen. Leipzig: Teubner 1948. — [5] JAHNKE-EMDE: Funktionstabellen mit Formeln und Kurven. Leipzig: Teubner 1909. — [6] Handbuch für Hochfrequenz- und Elektrotechnik, Bd. III, S. 208. — [7] BECKER, R.: Theorie der Elektrizität, Bd. I. Leipzig: Teubner 1944. — [8] Hütte, Bd. 1, S. 180. — [9] MAGNUS, W. u. F. OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, S. 30. Berlin: Springer 1943. — [10] FISCHER, J.: Hochfrequenztechnik und Elektroakustik 58 (1941) S. 171 (siehe auch die angegebenen Literaturstellen). — [11] DROSTE, H. W.: TFT 25 (1936) Heft. 6 und Mitt. Forsch.Anst. GHH-Konzern 6 (1938) S. 78 (mit vielen weiteren Literaturziten).

Dr. WOLFGANG HELD und Dipl.-Ing. KURT WENZEL, Siemens Schuckertwerke A.G., Dynamowerk, Berlin.

Eine Theorie des Wechselstromkreises mit Lichtbogen

II. Teil

Von

OTTO LOH, Neuss a. Rh.

Mit 5 Textabbildungen

(Eingegangen am 12. September 1958)

Die Ausgleichvorgänge durch Kreis- und Erdkapazitäten

Bei den nachfolgenden Ausführungen handelt es sich um eine Fortsetzung des in Bd. 44 (1959) Heft 4 dieser Zeitschrift bereits erschienenen ersten Teiles „Eine Theorie des Wechselstromkreises mit Lichtbogen“.

Bezeichnungen

R_1	= Ohmscher Widerstand von Trafo und Netzzuleitung	γ_x	= Phasenwinkel der Ausgleichströme
R_2	= Ohmscher Widerstand des Lastkreises	$\operatorname{tg} \gamma_x = \operatorname{tg} \delta_x \left(1 + \frac{2}{R_x} \frac{u_0 - u'_0}{i_L - i'_L} \right)$	
R_3	= Ohmscher Widerstand vor C_1	$\operatorname{tg} \delta_1 = \frac{R_1}{2 \cdot \omega'_1 \cdot L_1}$	
R_4	= Ohmscher Widerstand vor C_2	$\operatorname{tg} \delta_2 = \frac{R_2}{2 \cdot \omega'_2 \cdot L_2}$	
R''	= Kleinstmöglicher Widerstand der Verbindung zweier Stromkreise über ein Schaltgerät.	$\omega = 2 \pi f$ (Kreisfrequenz bei $f = 50 \text{ Hz}$: $\omega = 314$)	
φ	= Phasenwinkel der Spannung im Augenblick des Stromnulldurchganges bei metallisch geschlossenem Stromkreis	$\omega'_1 = \sqrt{\frac{1}{L_3 \cdot C_1} - \left(\frac{R_1}{2 L_1} \right)^2}$	
φ'	= Phasenwinkel der Spannung im Augenblick des Stromnulldurchganges nach der Zündung bei Berücksichtigung von L' und R' statt L und R	$\omega'_2 = \sqrt{\frac{1}{L_2 \cdot C_2} - \left(\frac{R_2}{2 L_2} \right)^2}$	
ψ	= Phasenwinkel des Stromes im metallisch geschlossenen Stromkreis	$z_{ges} = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + [\omega (L_1 + L_2)]^2}$	
ψ'	= Phasenwinkel des Stromes im metallisch geschlossenen Stromkreis vor der Zündung des Lichtbogens	$z_b = \sqrt{R_b^2 + (\omega L_2)^2}$	
$\varphi_1 = \arccos \frac{\frac{R''}{L''} - \frac{R_1}{2 L_1}}{\sqrt{\left(\frac{R''}{L''} - \frac{R_1}{2 L_1} \right)^2 + \omega_1'^2}}$		$e_b = \text{Lichtbogenspannung} = a + b \cdot l + \frac{c + d \cdot l}{i + i_{00}}$	(Die konstante induktive und ohmsche Komponente der Lichtbogenspannung ist bereits zu den Stromkreis konstanten L' und R' addiert)
$\varphi_2 = \arccos \frac{\frac{R''}{L''} - \frac{R_2}{2 L_2}}{\sqrt{\left(\frac{R''}{L''} - \frac{R_2}{2 L_2} \right)^2 + \omega_2'^2}}$		$u' = \text{Spannungsabfall an einem lastseitigen Stromkreisglied.}$	

Ganz allgemein läßt sich das Ersatzbild für Spannungsnetze bei Berücksichtigung der Kreis- und Erdkapazitäten, bei welchen eine Last zu oder abgeschaltet wird, durch nachfolgende Ersatzschaltung darstellen (Bild 28).

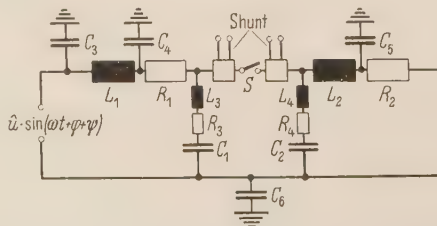


Bild 28. Ersatzschaltung bei Berücksichtigung der Kreis- und Erdkapazitäten.

In Bild 28 sind die verschiedenen Erdkapazitäten durch C_3 ; C_4 ; C_5 und C_6 angedeutet worden. Die durch derartige Kapazitäten hervorgerufenen Ausgleichvorgänge überlagern sich nach dem Superpositionsprinzip den anderen Vorgängen.

Bei plötzlichen Spannungs- und Stromstärkeänderungen verläuft bekanntlich der Ausgleichstrom in Selbstinduktionen entsprechend [1]

$$i'_L = i'_L e^{-\frac{t}{2T}} \cos(\omega t + \gamma) \quad (30)$$

und die Ausgleichsspannung an Kondensatoren entsprechend

$$u'_c = \frac{u_c}{\cos \delta} \cdot e^{-\frac{t}{2T}} \cdot \sin(\omega' t + \gamma - \delta) = i'_L \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot e^{-\frac{t}{2T}} \cdot \sin(\omega' t + \gamma - \delta). \quad (31)$$

Berechnung der durch den Vorzeichenwechsel der Lichtbogenspannung hervorgerufenen Stromamplituden

Der Schaltstrom [1] ergibt sich wegen der vernachlässigbar kleinen Änderung des Stromes im Augenblick des Vorzeichenwechsels der Lichtbogenspannung zu:

$$I_0 = i_0 - i'_0 = 0 \quad (32)$$

und die Schaltspannung zu:

$$U_0 = u_c - u'_c \quad (33)$$

mit

$$\begin{aligned} u_c &= n \cdot e_{b_1} && \text{vor Lichtbogenspannungssprung,} && e_{b_1} = \text{Lichtbogenspg. im Löschaugenblick,} \\ u'_c &= -n \cdot e_{b_2} && \text{nach Lichtbogenspannungssprung,} && e_{b_2} = \text{Lichtbogenspg. im Zündaugenblick.} \end{aligned}$$

Die Lichtbogenspannung vor und nach dem Vorzeichenwechsel wird hinreichend genau durch Gl. (10) beschrieben.

Es ergibt sich somit:

$$U_0 = u_c - u'_c = n \cdot (e_{b_1} + e_{b_2}). \quad (34)$$

Durch Vergleich der Schaltwerte mit den Anfangswerten des Ausgleichvorganges ergibt sich an Hand der Schaltgesetze:

$$i'_L \cdot \cos \gamma = 0, \quad (35)$$

$$i'_L \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sin(\gamma - \delta) = n \cdot (e_{b_1} + e_{b_2}). \quad (36)$$

Hieraus folgt:

$$\cos \gamma = 0 \rightarrow \gamma = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

und somit der Ausgleichsstrom

$$i'_L = -i'_L e^{-\frac{R}{2L} \cdot t} \cdot \sin(\omega t). \quad (37)$$

Dieser ist mit dem Sinus der Zeit veränderlich und klingt exponentiell ab. Die Amplitude i'_L errechnet sich aus:

$$i'_L = -\frac{U_0}{\cos \delta} \sqrt{\frac{C}{L}} = -\frac{n \cdot (e_{b_1} + e_{b_2})}{\cos \delta} \sqrt{\frac{C}{L}} = -\frac{n \cdot (e_{b_1} + e_{b_2})}{\cos \delta} \cdot \omega' \cdot C \quad (38)$$

mit

$$\cos \delta = \sqrt{1 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 \frac{C}{L}}.$$

Bei kleinem Widerstand R kann $\cos \delta = 1$ gesetzt werden. Wird z. B. ein Stromkreis über eine Erdkapazität mit $C = 10^{-9}$ F und $f = 70000$ Hz angenommen, so ergibt sich: $2 \cdot \omega' \cdot C = 4,4 \cdot 10^{-3}$. Die auf den Oszillogrammen beobachteten Lichtbogenspannungen im Löschaugenblick sind etwa von der Größenordnung $e_{b_1} = e_{b_2} = 300-400 \text{ V}_{\text{mom}}$. Somit ergibt sich die Amplitude des Ausgleichstromes in diesem Stromkreis zu: $i'_L = 1,3 \text{ A}_{\text{mom}}$ bis $1,8 \text{ A}_{\text{mom}}$.

Berechnung der durch Stromstärkeänderungen hervorgerufenen Ausgleichsspannungen

Der durch C_1 und C_2 hindurchfließende Strom wie der Spannungsabfall an L_3 und L_4 , R_3 und R_4 kann wegen der in Stromkreisen vorliegenden Verhältnisse vernachlässigt werden. Die an dem Schalter anliegende Spannung ist dann gleich der Differenz der Kondensatorspannungen.

Die Spannung an C_2 vor der Abschaltung errechnet sich mit der Lichtbogenspannung $n \cdot e_b$ aus:

$$\dot{u} = \dot{i}_0 \cdot z_{ges} + n \cdot e_b, \quad (39)$$

$$\dot{u}_{C_2} = \dot{i}_0 \cdot z_2 \quad (39a)$$

und

$$\frac{\dot{u}_{C_2}}{\dot{u}} = \frac{\dot{i}_0 \cdot z_2}{\dot{i}_0 \cdot z_{ges} + n \cdot e_b} = \frac{z_2}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_b}{\dot{i}_0}} \quad (40)$$

zu:

$$u_{C_2} = \dot{u} \frac{z_2}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_b}{\dot{i}_0}} \cdot \sin(\omega t + \psi + \varphi). \quad (41)$$

Die Spannung an C_1 vor dem Abschalten errechnet sich aus:

$$\dot{u} = \dot{i}_0 \cdot z_{ges} + n \cdot e_b, \quad (42)$$

$$\dot{u}_{C_1} = \dot{i}_0 \cdot z_2 + n \cdot e_b \quad (42a)$$

$$\frac{\dot{u}_{C_1}}{\dot{u}} = \frac{\dot{i}_0 \cdot z_2 + n \cdot e_b}{\dot{i}_0 \cdot z_{ges} + n \cdot e_b} = \frac{z_2 + \frac{n \cdot e_b}{\dot{i}_0}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_b}{\dot{i}_0}} \quad (42b)$$

zu

$$u_{C_1} = \dot{u} \frac{z_2 + \frac{n \cdot e_b}{\dot{i}_0}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_b}{\dot{i}_0}} \cdot \sin(\omega t + \psi + \varphi). \quad (43)$$

Der stationäre Strom durch die Induktivität L_2 und die stationäre Kondensatorspannung an C_2 errechnen sich zu:

Unmittelbar vor Einsetzen des Ausgleichvorganges Nach Ausklingen des Ausgleichvorganges

$$i_{L_2} = i_0, \quad i'_{L_2} = i'_0, \quad (44)$$

$$u_{C_2} = \dot{u} \frac{z_2 \cdot \sin(\omega t_1 + \psi + \varphi)}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_1}}{\dot{i}_0}}, \quad u'_{C_2} = \dot{u} \frac{z_2 \cdot \sin(\omega t_2 + \psi + \varphi)}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_2}}{\dot{i}'_0}}. \quad (45)$$

Beim Einsetzen des Ausgleichvorganges ergibt sich mit dem Schwingungswiderstand $\sqrt{L_2/C_2}$ an Hand der Schaltgesetze [1]

$$i'_L \cdot \cos \gamma_2 = I_0, \quad (46)$$

$$i'_L \sqrt{\frac{L_2}{C_2}} \cdot \sin(\gamma_2 - \delta_2) = \dot{u} \frac{z_2 \cdot \sin(\psi + \varphi)}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_1}}{\dot{i}_0}} - \dot{u} \frac{z_2 \cdot \sin(\psi + \varphi)}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_2}}{\dot{i}'_0}}. \quad (47)$$

Die Anfangsphase des Ausgleichstromes ergibt sich durch Division dieser Gleichungen nach einer Umformung [1] zu:

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \operatorname{tg} \delta_2 \left(1 + \frac{2}{R_2} \frac{\frac{\dot{u} \frac{z_2 \cdot \sin(\psi + \varphi)}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_1}}{\dot{i}_0}} - \dot{u} \frac{z_2 \cdot \sin(\psi + \varphi)}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_2}}{\dot{i}'_0}}}{i_0} \right). \quad (48)$$

Wird $\operatorname{tg} \delta_2$ und ω'_2 eingesetzt, so erhält man:

$$\operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{R_2}{2 \cdot L_2 \sqrt{\frac{1}{L_2 \cdot C_2} - \left(\frac{R_2}{2 L_2}\right)^2}} + \frac{1}{L_2 \sqrt{\frac{1}{L_2 \cdot C_2} - \left(\frac{R_2}{2 L_2}\right)^2}} \frac{\frac{\dot{u} \frac{z_2 \cdot \sin(\psi + \varphi)}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_1}}{\dot{i}_0}} - \dot{u} \frac{z_2 \cdot \sin(\psi + \varphi)}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_2}}{\dot{i}'_0}}}{i_0}}. \quad (48a)$$

Mit Hilfe der Gl. (46) ergibt sich die Stromamplitude aus:

$$i'_L = I_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_2} \quad (49)$$

und die Spannungsamplitude zu:

$$u'_{C_2} = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}} \cdot i'_L = \sqrt{\frac{L_2}{C_2} \cdot I_0^2 + \frac{\left(u \frac{z_2 \cdot \sin(\psi + \varphi)}{z_{ges} + \frac{n \cdot e b_1}{i_0}} - u \frac{z_2 \cdot \sin(\psi + \varphi)}{z_{ges} + \frac{n \cdot e b_2}{i'_0}} + \frac{1}{2} R_2 \cdot I_0 \right)^2}{1 - \frac{C_2}{L_2} \left(\frac{R_2}{2} \right)^2}}. \quad (50)$$

Die stationären Ströme der Induktivität L_1 und die stationäre Kondensatorsspannung an C_1 errechnet sich zu:

Unmittelbar vor Einsetzen des Ausgleichvorganges Nach Ausklingen des Ausgleichvorganges

$$i_{L_1} = i_0, \quad i'_{L_1} = i'_0, \quad (51)$$

$$u_{C_1} = u \frac{z_2 + \frac{n \cdot e b_1}{i_0}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e b_1}{i_0}} \cdot \sin(\omega t + \psi + \varphi), \quad u'_{C_1} = u \frac{z_2 + \frac{n \cdot e b_2}{i'_0}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e b_2}{i'_0}} \cdot \sin(\omega t + \psi + \varphi). \quad (52)$$

Beim Einsetzen des Ausgleichvorganges ergibt sich:

$$i'_L \cdot \cos \gamma_1 = I_0, \quad (53)$$

$$i'_L \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \sin(\gamma_1 - \delta_1) = u \frac{z_2 + \frac{n \cdot e b_1}{i_0}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e b_1}{i_0}} \sin(\psi + \varphi) - \frac{z_2 + \frac{n \cdot e b_2}{i'_0}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e b_2}{i'_0}} u \sin(\psi + \varphi). \quad (54)$$

Die Anfangsphase des Ausgleichstromes ergibt sich nunmehr zu:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \operatorname{tg} \delta_1 \left(1 + \frac{2}{R_1} \frac{\left(u \frac{z_2 + \frac{n \cdot e b_1}{i_0}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e b_1}{i_0}} \sin(\psi + \varphi) - u \cdot \sin(\psi + \varphi) \frac{z_2 + \frac{n \cdot e b_2}{i'_0}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e b_2}{i'_0}} \right)}{i_0} \right). \quad (55)$$

Mit $\operatorname{tg} \delta_1$ und ω'_1 ergibt sich somit:

$$\operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{R_1}{2 \cdot L_1 \sqrt{\frac{1}{L_1 \cdot C_1} - \left(\frac{R_1}{2 L_1} \right)^2}} \left(1 + \frac{2}{R_1} \frac{\left(u \frac{z_2 + \frac{n \cdot e b_1}{i_0}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e b_1}{i_0}} \sin(\psi + \varphi) - u \cdot \sin(\psi + \varphi) \frac{z_2 + \frac{n \cdot e b_2}{i'_0}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e b_2}{i'_0}} \right)}{i_0} \right). \quad (56)$$

Mit Hilfe der Gl. (55) errechnet sich die Stromamplitude unter Beachtung der stationären Kondensatorsspannung zu:

$$i'_L = I_0 \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_1} \quad (57)$$

und die Spannungsamplitude:

$$u'_{C_1} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot i'_L, \quad (58)$$

$$u'_{C_1} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1} \cdot I_0^2 + \frac{\left(u \frac{z_2 + \frac{n \cdot e b_1}{i_0}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e b_1}{i_0}} \sin(\psi + \varphi) - u \cdot \sin(\psi + \varphi) \frac{z_2 + \frac{n \cdot e b_2}{i'_0}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e b_2}{i'_0}} + \frac{1}{2} R_1 \cdot I_0 \right)^2}{1 - \frac{C_1}{L_1} \left(\frac{R_1}{2} \right)^2}}. \quad (58a)$$

Die nach einer Stromstärkeänderung an der Unterbrecherstelle anliegende Ausgleichspannung hat somit den Betrag:

$$\begin{aligned}
 u_s = u'_{C_1} - u'_{C_2} = & \sqrt{\frac{L_1}{C_1} \cdot I_0^2 + \frac{\left(u \frac{z_2 + \frac{n \cdot e_{b_1}}{i_0} \cdot \sin(\psi + \varphi) - u \frac{z_2 + \frac{n \cdot e_{b_2}}{i_0} \cdot \sin(\psi + \varphi) + \frac{R_1}{2} \cdot I_0}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_1}}{i_0}} \right)^2}{1 - \frac{C_1}{L_1} \left(\frac{R_1}{2} \right)^2}} \\
 & \times e^{-\frac{R_1}{2 \cdot L_1} \cdot t} \cdot \sin(\omega'_1 t + \gamma_1 - \delta_1) - \sqrt{\frac{L_2}{C_2} \cdot I_0^2 + \frac{\left(u \frac{z_2 \cdot \sin(\psi + \varphi)}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_1}}{i_0}} - u \frac{z_2 \cdot \sin(\psi + \varphi)}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_2}}{i_0}} + \frac{R_2}{2} \cdot I_0 \right)^2}{1 - \frac{C_2}{L_2} \left(\frac{R_2}{2} \right)^2}} \\
 & \times e^{-\frac{R_2}{2 \cdot L_2} \cdot t} \cdot \sin(\omega'_2 t + \gamma_2 - \delta_2). \quad (59)
 \end{aligned}$$

Zerreißt im Augenblick der Schalterffnung, z. B. infolge Blasung, der Gasentladungsschlauch, oder ist wegen des annähernd Ohmschen bzw. kapazitiven $\cos \varphi$ ein Weiterbrennen des Lichtbogens ohne Wiederzndung nicht möglich, so daß die Kopplung der beiden Schwingkreise getrennt wird, dann liegt an der Unterbrecherstelle die zusätzliche Spannung an:

$$\begin{aligned}
 u_s = & - \left[u \frac{z_2 + \frac{n \cdot e_{b_1}}{i_0} \cdot \sin(\psi + \varphi)}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_1}}{i_0}} \right] e^{-\frac{R_1}{2 \cdot L_1} \cdot t} \cdot \sin(\omega'_1 t + \gamma_1 - \delta_1) \\
 & + \left[u \frac{z_2}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_1}}{i_0}} \cdot \sin(\psi + \varphi) \right] e^{-\frac{R_2}{2 \cdot L_2} \cdot t} \cdot \sin(\omega'_2 t + \gamma_2 - \delta_2). \quad (60)
 \end{aligned}$$

Die obere Grenze der wiederkehrenden Spannung an dem Schalter ($u_{s_{ges}}$) ist somit in diesem Fall wie auch RÜDENBERG [1] angibt gleich:

$$u_{s_{ges}} = u_s + u \leq 2 \cdot u \quad \left(\text{Bei } \frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2} \quad \text{und} \quad L_1 = L_2 \right).$$

Bei großen ffnungsgeschwindigkeiten v , mehreren in Reihe geschalteten Unterbrecherstellen n und Blasung mit einem Gas oder einem starken Magnetfeld, kann der Lichtbogen, besonders bei kleinen Stromstärken, auch während einer Halbwelle, meistens allerdings in der abfallenden Stromhlfte, durch Trennung des Plasmaschlaches unterbrochen werden. In diesem Fall, wie auch bei Ausgleichvorgngen während des Stromflusses, können erheblich höhere Ausgleichspannungen auftreten, die nach Gl. (59) errechnet werden.

Ausgleichströme über die Schaltstrecke bei noch intaktem Gasentladungsschlauch

Wird nunmehr die Energieabnahme der Einzelkreise durch die Ausgleichströme zwischen den beiden nach Bild 28 gekoppelten Schwingungskreisen vernachlässigt, so ergibt sich der über das noch leitfähige Bogenplasma fließende Ausgleichstrom an Hand der Gleichung

$$L'' \frac{di}{dt} + R'' \cdot i + n \cdot e_b = u_s. \quad (61)$$

Hierbei sind im ungünstigsten Fall für L'' und R'' die praktisch kleinstmöglichen Werte für die Verbindung zweier Stromkreise über ein Schaltgerät einzusetzen.

Das Strglied der Differentialgleichung (61) setzt sich aus 2 schnell veränderlichen gedämpften Vorgängen zusammen.

Die Auflösung der Gleichung:

$$L'' \frac{di}{dt} + R'' \cdot i + n \cdot e_b = A \cdot e^{-\frac{R_1}{2L_1} \cdot t} \cdot \sin(\omega'_1 t + \gamma_1 - \delta_1) - B \cdot e^{-\frac{R_2}{2L_2} \cdot t} \cdot \sin(\omega'_2 t + \gamma_2 - \delta_2) \quad (61a)$$

(A und B sind Konstante)

ergibt mittels Variation der Konstanten:

$$L'' \frac{di_1}{dt} + R'' \cdot i_1 + n \cdot e_b = 0, \quad (62)$$

$$i_1 = C \cdot e^{-\frac{R''}{L''} \cdot t} - \frac{n \cdot e_b}{R''} \quad (63)$$

mit

$$i = C(x) \left(e^{-\frac{R''}{L''} \cdot t} \right) - \frac{n \cdot e_b}{R''} \quad (64)$$

und

$$\frac{di}{dt} = C'(x) \left(e^{-\frac{R''}{L''} \cdot t} \right) - C(x) \frac{R''}{L''} \cdot e^{-\frac{R''}{L''} \cdot t} \quad (64a)$$

durch Einsetzen in Gl. (61a) die Gleichung:

$$C'(x) = \frac{A \cdot e^{-\frac{R_1}{2L_1} \cdot t} \cdot \sin(\omega'_1 t + \gamma_1 - \delta_1)}{L'' \cdot e^{-\frac{R''}{L''} \cdot t}} - \frac{B \cdot e^{-\frac{R_2}{2L_2} \cdot t} \cdot \sin(\omega'_2 t + \gamma_2 - \delta_2)}{L'' \cdot e^{-\frac{R''}{L''} \cdot t}}. \quad (65)$$

Die Funktion $C(x)$ bestimmt sich somit zu:

$$C(x) = \frac{A}{L''} \int e^{\left(\frac{R''}{L''} - \frac{R_1}{2L_1}\right) \cdot t} \cdot \sin(\omega'_1 t + \gamma_1 - \delta_1) dx - \frac{B}{L''} \int e^{\left(\frac{R''}{L''} - \frac{R_2}{2L_2}\right) \cdot t} \cdot \sin(\omega'_2 t + \gamma_2 - \delta_2) dx. \quad (66)$$

Nach Auflösung der Integrale ergibt sich:

$$C(x) = \frac{A}{L''} \frac{e^{\left(\frac{R''}{L''} - \frac{R_1}{2L_1}\right) \cdot t}}{\sqrt{\left(\frac{R''}{L''} - \frac{R_1}{2L_1}\right)^2 + \omega_1'^2}} \cdot \sin(\omega'_1 t + \gamma_1 - \delta_1 + \varphi_1) + C_1$$

$$- \frac{B}{L''} \frac{e^{\left(\frac{R''}{L''} - \frac{R_2}{2L_2}\right) \cdot t}}{\sqrt{\left(\frac{R''}{L''} - \frac{R_2}{2L_2}\right)^2 + \omega_2'^2}} \cdot \sin(\omega'_2 t + \gamma_2 - \delta_2 + \varphi_2) + C_2 \quad (67)$$

und der Strom errechnet sich zu:

$$i = A \frac{e^{-\frac{R_1}{2L_1} \cdot t} \cdot \sin(\omega'_1 t + \gamma_1 - \delta_1 + \varphi_1)}{\sqrt{\left(R'' - \frac{L''}{2L_1} \cdot R_1\right)^2 + \omega_1'^2 \cdot L''^2}} - B \frac{e^{-\frac{R_2}{2L_2} \cdot t} \cdot \sin(\omega'_2 t + \gamma_2 - \delta_2 + \varphi_2)}{\sqrt{\left(R'' - \frac{L''}{2L_2} \cdot R_2\right)^2 + \omega_2'^2 \cdot L''^2}}$$

$$+ (C_1 + C_2) \cdot e^{-\frac{R''}{L''} \cdot t} - \frac{n \cdot e_b}{R''}. \quad (68)$$

Bestimmung der Konstanten $C_1 + C_2$.

Die durch obige Gleichungen beschriebenen Schwingungen setzen im Augenblick des Stromes i_0 bei $t = 0$ ein. Hierdurch bestimmen sich die Konstanten $C_1 + C_2$ zu:

$$C_1 + C_2 = \frac{-A}{\sqrt{\omega_1'^2 \cdot L''^2 + \left(R'' - \frac{L''}{2L_1} \cdot R_1\right)^2}} \cdot \sin(\gamma_1 - \delta_1 + \varphi_1)$$

$$+ \frac{B}{\sqrt{\omega_2'^2 \cdot L''^2 + \left(R'' - \frac{L''}{2L_2} \cdot R_2\right)^2}} \cdot \sin(\gamma_2 - \delta_2 + \varphi_2) + \frac{n \cdot e_b}{R''} + i_0. \quad (69)$$

Die allgemeine Lösung lautet somit:

$$i = \frac{A}{\sqrt{\omega_1'^2 \cdot L''^2 + \left(R'' - \frac{L''}{2L_1} \cdot R_1\right)^2}} \left[e^{-\frac{R_1}{2L_1} \cdot t} \cdot \sin(\omega_1' t + \gamma_1 - \delta_1 + \varphi_1) - e^{-\frac{R''}{L''} \cdot t} \cdot \sin(\gamma_1 - \delta_1 + \varphi_1) \right] \\ - \frac{B}{\sqrt{\omega_2'^2 \cdot L''^2 + \left(R'' - \frac{L''}{2L_2} \cdot R_2\right)^2}} \left[e^{-\frac{R_2}{2L_2} \cdot t} \cdot \sin(\omega_2' t + \gamma_2 - \delta_2 + \varphi_2) - e^{-\frac{R''}{L''} \cdot t} \cdot \sin(\gamma_2 - \delta_2 + \varphi_2) \right] \\ + \frac{n \cdot e_b}{R''} \left[e^{-\frac{R''}{L''} \cdot t} - 1 \right] + i_0 \cdot e^{-\frac{R''}{L''} \cdot t}. \quad (70)$$

Sind noch mehr als zwei Störglieder in Gl. (61) vorhanden, so erhöht sich die Zahl der Summanden mit den Faktoren C, D, \dots und den dazugehörigen $R_x; L_x; \omega_x; \gamma_x$ und δ_x .

Als Konstante $A; B \dots$ werden die Spannungsamplituden der einzelnen Ausgleichsspannungen eingesetzt. Bei bekanntem C_1 und C_2 sind dies z. B.

$$A = \sqrt{\frac{L_1}{C_1} I_0^2 + \frac{\left[\left(\frac{z_2 + \frac{n \cdot e_{b_1}}{\hat{i}_0}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_1}}{\hat{i}_0}} - \frac{z_2 + \frac{n \cdot e_{b_2}}{\hat{i}_0'}}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_2}}{\hat{i}_0'}} \right) \hat{u} \cdot \sin(\psi + \varphi) + \frac{R_1}{2} I_0 \right]^2}{1 - \frac{C_1}{L_1} \left(\frac{R_1}{2} \right)^2}}, \quad (71)$$

$$B = \sqrt{\frac{L_2}{C_2} I_0^2 + \frac{\left[\left(\frac{z_2}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_1}}{\hat{i}_0}} - \frac{z_2}{z_{ges} + \frac{n \cdot e_{b_2}}{\hat{i}_0'}} \right) \hat{u} \cdot \sin(\psi + \varphi) + \frac{R_2}{2} I_0 \right]^2}{1 - \frac{C_2}{L_2} \left(\frac{R_2}{2} \right)^2}}. \quad (71a)$$

Bei anliegenden Ausgleichsspannungen über Erdkapazitäten sind deren Amplituden einzusetzen.

Versuchsergebnisse

Die Konstanten des Stromkreises

Die kleinstmöglichen Werte für L'' und R'' für die Verbindung zweier Stromkreise über ein Schaltgerät, wurden bereits an anderer Stelle angegeben [25].

Es ergab sich:

$$L'' = 5,6 \cdot 10^{-6} \text{ H}, \\ R'' = 1,76 \cdot 10^{-3} \text{ } \Omega.$$

Bei Niederspannungsnetzen gehen in L_1 und R_1 die Transformatorenwiderstände ein. Wird angenommen, daß der Schalter mit einer kurzen Zuleitung an der Sammelschiene eines 500 kVA Transformators liegt, so ergibt sich bei 500 V_{eff} verketteter Spannung

$$L_1 = 45,2 \cdot 10^{-6} \text{ H/Phase}, \\ R_1 = 6,95 \cdot 10^{-3} \text{ } \Omega/\text{Phase}.$$

Liegen zwischen Sammelschiene und dem 500 kV_A Transformator noch 22 m N.K.B.A. $3 \times 150^2 \times 3$, so erhält man:

$$L_1 = 48,7 \cdot 10^{-6} \text{ H/Phase} \\ R_1 = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ } \Omega/\text{Phase}$$

Der Laststromkreis hatte folgende Werte:

$$\begin{array}{ll} \text{A} & L_2 = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ H/Phase,} \\ & R_2 = 0,4 \quad \Omega/\text{Phase.} \\ \text{B} & L_2 = 1,29 \cdot 10^{-3} \text{ H/Phase} \\ & R_2 = 0,177 \quad \Omega/\text{Phase} \end{array}$$

Bei einphasiger Schaltung des Laststromkreises wurden einige Oszillogramme aufgenommen. Hierfür gelten somit die nachfolgend aufgeführten Stromkreiskonstanten:

$$\begin{array}{ll} L_1 = 97,4 \cdot 10^{-6} \text{ H,} \\ R_1 = 16,8 \cdot 10^{-3} \Omega. \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ll} \text{A} & L_2 = 5,8 \cdot 10^{-3} \text{ H,} \\ & R_2 = 0,8 \quad \Omega. \\ \text{B} & L_2 = 2,58 \cdot 10^{-3} \text{ H,} \\ & R_2 = 0,25 \quad \Omega. \end{array}$$

Es ist schwierig, die Größe der Kapazitäten C_1 und C_2 zu ermitteln. Eine größere Zahl von Oszillogrammen wurde an Stromkreisen mit den oben angegebenen Induktivitäten aufgenommen, deren Erdkapazitäten vermessen waren. Die primärseitigen und sekundärseitigen Erdkapazitäten, sind aus nachfolgendem Bild 29 ersichtlich.

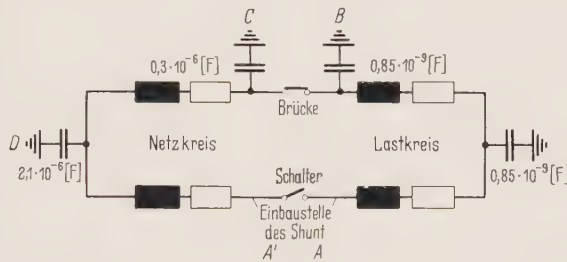


Bild 29. Versuchsstromkreis mit den vermessenen primärseitigen und sekundärseitigen Erdkapazitäten.

Gemessene Erdkapazitäten am Prüfstromkreis

Es zeigte sich, daß es ein wesentlicher Unterschied, bezüglich der auftretenden Ausgleichsfrequenzen im Strom, beim Stromnulldurchgang, ist, ob der Shunt netzseitig oder lastseitig, von der Lichtbogenstrecke aus gesehen, in den Stromkreis eingebaut worden ist (Bild 25b und 25c). Der Unterschied entsteht dadurch, daß der Verstärker einseitig geerdet werden muß und somit, durch die vorhandenen Kreiskapazitäten gegen Erde, Ausgleichschwingungen verschiedener Frequenzen und Amplituden auftreten.

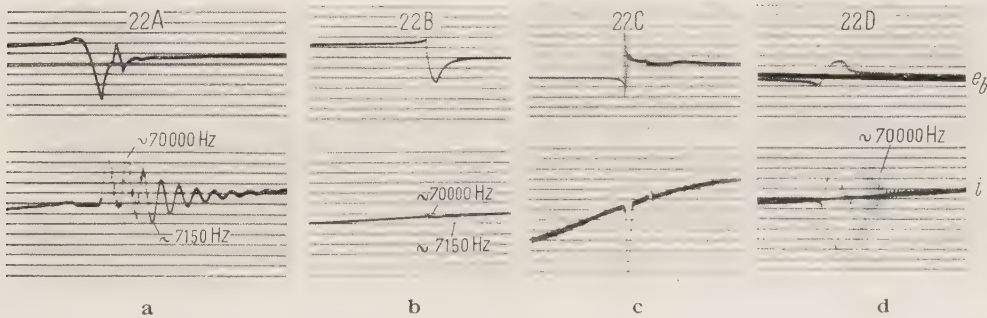


Bild 30. Stromnulldurchgänge und Lichtbogen Spannungen. Schütz Type 9; $u = 556 V_{eff}$; $I_f = 340 A_{eff}$; $\cos \varphi \approx 0,4$; $n = 2$.
a) Shunt lastseitig; b) Shunt netzseitig; c) Shunt netzseitig; d) Shunt netzseitig.

Auf der Lastseite sind die Amplituden der Ausgleichvorgänge erheblich höher als auf der Netzseite, weil in dem Umspanner die relativ hochfrequenten Ausgleichvorgänge fast völlig unterdrückt werden, so daß ein Nachweis von Schwingungen, die über den Umspanner gelaufen sind, nicht möglich war. In Bild 30 zeigen Oszillogramm a und b jeweils einen Stromnulldurchgang mit der zugehörigen Lichtbogenspannung bei Verwendung der Schütz-Type 9, wobei der Shunt im Falle des Oszillogramms Bild 30a lastseitig und im Falle des Oszillogramms Bild 30b netzseitig eingebaut war. Bei Oszillogramm Bild 30a ist eine Grundfrequenz von ca. 7150 Hz mit einer überlagerten Frequenz von ca. 70000 Hz auf der Stromkurve zu erkennen. Bei Oszillogramm Bild 30b (netzseitig) hingegen zeigen sich erheblich amplitudenschwächere Ausgleichvorgänge in der Stromkurve mit den gleichen Frequenzen wie bei Oszillogramm 30a.

Aus den in Bild 29 ersichtlichen Erdkapazitäten läßt sich mit Hilfe der lastseitigen Induktivität die Frequenz von $f = 71\,800$ Hz errechnen, wenn angenommen wird, daß die Schwingung von dem lastseitig angeordneten, geerdeten, Shunt über die lastseitigen Widerstände und Induktivitäten und die Erdkapazität des Gegenpols von $C = 0,85 \times 10^{-9}$ F verläuft.

Bei netzseitig eingebautem Shunt muß, wie bereits oben erwähnt wurde, mit einer sehr starken Dämpfung der relativ hochfrequenten Vorgänge durch den Umformer gerechnet werden, so daß die Ausgleichvorgänge über den Umspanner hinweg praktisch unterdrückt werden. Die trotzdem auf Oszillogramm Bild 30b aufgetretenen Schwingungsfrequenzen können, wie sich leicht durch Nachrechnung an Hand von Bild 29 ergibt, nicht durch Schwingungen zwischen Shunt und Umspanner, Umspannersternpunkt oder noch weiter über den Umspanner hinwegliegende Punkte des Stromkreises erklärt werden. Somit müssen diese Frequenzen, weil sie auch in der Frequenz identisch sind mit den sehr amplitudenstarken bei lastseitigem Einbau des Shunts (Oszillogramm Bild 30a) über die Plasmastrecke des Lichtbogens hinweg durch Schwingungen des Lastkreises, ohne und mit netzseitiger Zuleitung, hervorgerufen worden sein.

Die Oszillogramme Bild 30c und 30d geben die Ausgleichvorgänge im Augenblick des Stromnulldurchganges im gleichen Stromkreis mit dem gleichen Schütz, Type 9, bei einem lediglich etwas anders gestalteten Aufbau wieder, der sich aber nicht meßbar von dem des Bildes 29 unterschied. Die trotzdem vorhandenen kleinen Differenzen hatten zur Folge, daß bei dem lastseitig eingebauten und geerdeten Shunt lediglich Ausgleichvorgänge mit der hohen Frequenz von ca. 70000 Hz auftraten, während der andere Resonanzkreis mit 7150 Hz nicht angeregt wurde. Der Abstand, der auf Oszillogramm Bild 30c ersichtlichen beiden Ausgleichvorgänge ist selbst bei den einzelnen Stromnulldurchgängen eines einzigen Abschaltvorganges unterschiedlich. Während auf Oszillogramm Bild 30c ein annähernd optimaler Abstand vorhanden ist, können diese beiden Ausgleichvorgänge derart dicht aneinander rücken, daß bei zu geringer Vergrößerung der Eindruck eines einzigen Ausgleichvorganges erweckt werden kann. Auf Oszillogramm Bild 30d ist aber deutlich zu erkennen, daß auch derartig ineinander geschobene Ausgleichvorgänge bei entsprechender Vergrößerung deutlich als zwei getrennte Einzelvorgänge differenziert werden können.

Wie an Hand des Oszillogramms Bild 30c ersichtlich, sind die Ausgleichvorgänge stets in einem Augenblick, in welchem auch bei der Lichtbogenspannung eine sprunghafte Veränderung zu beobachten ist. Beim Verlauf der Lichtbogenspannung sind deutlich zwei Umschlagpunkte mit gleichzeitigen Ausgleichvorgängen des Stromes zu beobachten. Der maximal beobachtete Zeitabstand beträgt ungefähr 1 ms. (Die Auswertung nach Bild 24 ergibt maximal $\sim 1,3$ ms Zeitabstand der Ausgleichvorgänge.) Offensichtlich ist der Zeitpunkt des ersten Lichtbogenspannungssprunges unabhängig von dem Auftreten des zweiten und umgekehrt.

Der Verlauf der Lichtbogenspannung auf Oszillogramm Bild 30d ähnelt stark dem des Oszillogramms von TIMOSHENKO [22] auf welchem allerdings die Einzelheiten der Lichtbogenspannung infolge größerer Verstärkung besser erkenntlich sind. Wie durch Vergleich mit Oszillogramm 30c und 30d ersichtlich, erfolgte der zweite Ausgleichvorgang anscheinend im Augenblick des Überganges von der Glimm- zur Bogenentladung. Die von TIMOSHENKO bei kurzen Bögen (2 cm Länge) öfter beobachtete hochfrequente Schwingung (über 10^6 Hz) beim Übergang von

der Glimm- zur Bogenentladung ist mutmaßlich auf Schwingkreise über Erdkapazitäten zurückzuführen.

Bei Oszillogramm Bild 30a und 25c, wie auch bei Oszillogramm Bild 31 ist bei lastseitig eingebautem Shunt nach dem Vorzeichenwechsel der Lichtbogenspannung eine Ausgleichfrequenz von $f = 7150 \text{ Hz}$ sowohl beim Strom, wie auch bei der Lichtbogenspannung zu beobachten. Da sich die Frequenz dieser Schwingungen bei unterschiedlichen Lastkreisen nicht ändert, muß es sich entweder um netzseitige Ausgleichvorgänge oder um reine Lichtbogenschwingungen handeln. Andererseits zeigt auch das Oszillogramm Bild 30b, mit netzseitig eingebautem Shunt, wenn auch sehr amplitudenschwache, so doch gleichfrequente Ausgleichströme ($\sim 70000 \text{ Hz}$ und $\sim 7150 \text{ Hz}$) wie bei lastseitig eingebautem Shunt. Weil der

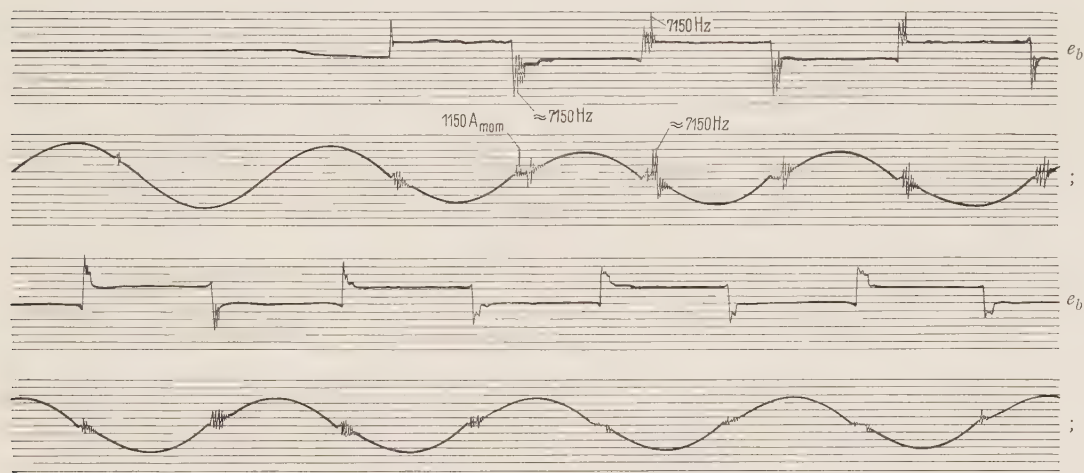


Bild 31. Einphasige Abschaltung mit Stehfeuer.
Schütz Type 10; $u = 556 \text{ V}_{eff}$; $I_r = 625 \text{ A}_{eff}$; $\cos \varphi = 0,38$; $n = 4$; Shunt lastseitig.

zwischen den beiden Einbaustellen des Shunts liegende Lichtbogen über einen Widerstand verfügt, müßte bei netzseitiger Ursache der Frequenz $f = 7150 \text{ Hz}$, die Amplitude bei netzseitigem Shunt auf Oszillogramm Bild 30b höher sein, als bei lastseitig eingebautem Shunt. Da das Gegenteil der Fall ist, muß es sich im vorliegenden Fall um eine Lichtbogenschwingung handeln, auch schon deshalb, weil dieser Ausgleichvorgang bei der gleichen Stromkreiseinstellung mit etwas anders gestaltetem räumlichen Aufbau auch bei lastseitig eingebautem Shunt völlig fehlt.

Nach MAYR [23] muß bei Stabilitätsbetrachtungen des Bogens in der Nähe des Stromnulldurchganges auch die thermische Trägheit des Bogens berücksichtigt werden. Θ hat die Dimension einer Zeit und ist definiert durch die Zeit:

$$\Theta = \frac{Q_0}{N_0}$$

während der die Bogenleistung N_0 in den Wärmespeicher der Bogensäule hineinfließen müßte, um die elektrische Leitfähigkeit im Verhältnis $1:e$ zu erhöhen. Umgekehrt wird durch den Entzug des Anteiles Q_0 der in der Bogensäule gespeicherten Wärme eine Widerstandserhöhung im Verhältnis $1:e$ eintreten.

Wie von MAYR [24] durchgeführte Untersuchungen gezeigt haben, liegen die Werte von Θ in Luft durchweg nahe bei dem Mittelwert $\Theta = 22 \mu\text{s}$, selbst wenn die Parallelkapazität im Ver-

hältnis 1:50 von 2 nF bis zu 100 nF verändert wurde. Hieraus errechnet sich bei ungedämpften Schwingungen

$$\omega = \frac{1}{\Theta} = 45500 \quad \text{und} \quad f = 7250 \text{ Hz.} \quad (72)$$

Gemessen wurde bei gedämpfter Schwingung eine Frequenz von $f = 7150$ Hz. Angesichts der vorliegenden Vereinfachungen in der Rechnung ist die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung zufriedenstellend.

In Bild 31 ist mit Schütz Type 10 ein Stehfeuer wiedergegeben. Wegen des lastseitigen Einbaus des geerdeten Shunts, sind bei den ersten Stromnulldurchgängen nicht nur starke Stromausgleichvorgänge ($I_{\max} \cong 1150 A_{sp}$) in der auf Oszillogramm Bild 30a beschriebenen Art und Weise zu erkennen, vielmehr schwankt auch die Lichtbogenspannung mit einer Ausgleichfrequenz von ca. 7150 Hz. Nach etwa 10 Halbwellen sind diese Ausgleichvorgänge bei der Lichtbogenspannung lediglich noch als Oberwellen zu erkennen und auch die Amplituden der stromseitigen Ausgleichvorgänge sind außerordentlich stark zurückgegangen ($I_{\max} \cong 134 A_{sp}$). Nach ca. 15 Halbwellen haben die Ausgleichvorgänge in der Stromkurve nur noch etwa doppelt so hohe Amplituden als bei Oszillogramm Bild 30b mit netzseitig eingebautem Shunt. Möglicherweise ist die zeitliche Veränderung der Amplitude hervorgerufen durch Veränderung der Bogenstrecke infolge Hinzutreten von Kohlenstoff, wegen Verrußung der Funkenkammer.

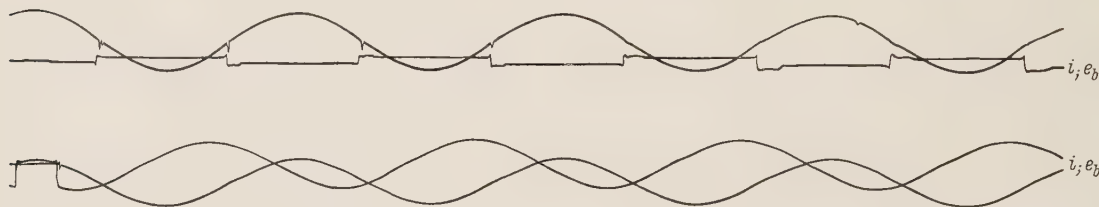


Bild 32. Strom und Lichtbogenspannung bei dreiphasiger Abschaltung
Schütz Type 12; $u = 570 V_{eff}$; $I_r = 40 A_{eff}$; $\cos \varphi = 0,4$. Netz und Laststernpunkt geerdet. Shunt am Sternpunkt.

Bild 32 zeigt eine dreiphasige Abschaltung mit dem Schütz-Type 12, bei last- wie auch netzseitig geerdetem Sternpunkt. Es trat Stehfeuer in einer Phase auf. Die Bedingungen waren die gleichen, wie sie in dem durchgerechneten Teil mit der Integrieranlage vorlagen. Ein Vergleich der beiden Bilder 18 und 32 zeigt hinreichende Übereinstimmung bezüglich des Verlaufs der Stromkurve.

In der folgenden Zahlentafel sind die errechneten und gemessenen Frequenzen der beiden betrachteten einphasigen Stromkreise zusammengestellt worden.

Zahlentafel 3. Errechnete und gemessene Frequenzen über Erdkapazitäten

Stromkreis- einstellung	Bezugspunkt auf Bild 29	L H	C F	Errechnete Frequenz Hz	Bild Nr.	Gemessen f Hz
VI	B	0,0058	$0,85 \cdot 10^{-9}$	71800	30	70000
VI	D	0,0058	$2,1 \cdot 10^{-6}$	1450	25	1500
VII	B	0,00258	$0,85 \cdot 10^{-9}$	107500	./.	./.
VII	D	0,00258	$2,1 \cdot 10^{-6}$	2160	./.	2120

Einstellung VI: $U = 556 V_{eff}$; $I = 340 A_{eff}$; $\cos \varphi = 0,35$; 1phasig;

Einstellung VII: $U = 556 V_{eff}$; $I = 625 A_{eff}$; $\cos \varphi = 0,38$; 1phasig.

Ein Vergleich der errechneten mit den gemessenen Frequenzen zeigt zufriedenstellende Übereinstimmung. Die vorletzte errechnete Frequenz wurde experimentell nicht beobachtet. Das Oszillogramm mit der letzten errechneten Frequenz ist nicht abgebildet worden, sie tritt genau wie die Frequenz 1500 Hz auf Bild 25c nach der Stromunterbrechung auf.

Zusammenfassung

1. Die durch den Vorzeichenwechsel der Lichtbogenspannung [Gl. (38)], wie auch die durch Stromstärkeänderungen auftretenden Ausgleichvorgänge [Gl. (59)] wurden berechnet. Außerdem wurden bei anliegenden Ausgleichwechselspannungen die Gleichungen der über die intakte Gasentladungsstrecke fließenden Ströme [Gl. (70)] errechnet.

2. Auf allen Kathodenstrahloszillogrammen (Bild 30) zeigen sich im Strom, bei lastseitig eingebautem Shunt nach jedem Stromnulldurchgang mindestens zwei Ausgleichvorgänge. Der erste Ausgleichvorgang setzt im Augenblick des Vorzeichenwechsels der Lichtbogenspannung ein. Der zweite Ausgleichvorgang erfolgt anscheinend im Augenblick des Überganges von der Glimm- zur Bogenentladung (Bild 30d).

3. An Hand der oszillographischen Untersuchungen (Bild 30 und 31) ergab sich, daß die nach dem Stromnulldurchgang auftretenden Ausgleichvorgänge durch die Erdkapazitäten und Kreiswiderstände bestimmt sind. Außerdem überlagert sich diesen bei besonderen Voraussetzungen noch eine Lichtbogenschwingung konstanter Frequenz [Gl. (72)].

Die Literaturstellen sind am Ende des 1. Teiles in Bd. 44, Heft 4 angegeben.

Dr. OTTO LOH, Neuss a. Rh., Oberstr. 126

Berichtigung

zum Beitrag A. GRÜN; Feldverlauf und spezifische Bremskraft in Wirbelstrombremsen.
Bd. XLIV (1959).

In Gleichung (9) muß der Faktor $1,02 \cdot 10^4$ im Nenner statt im Zähler stehen.

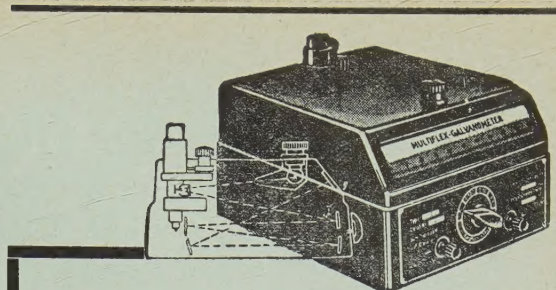
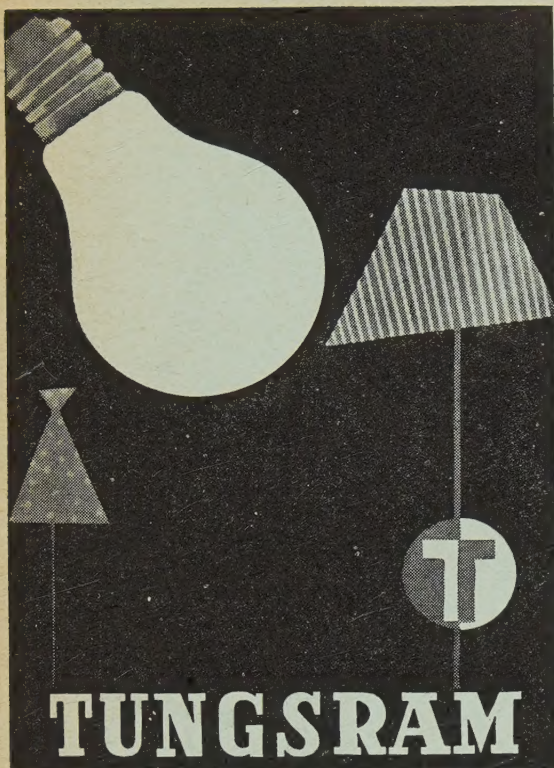
Gl. (9) muß also heißen:

$$\frac{W_{mech.}}{W} = \frac{K \cdot v}{1,02 \cdot 10^4 \text{ g cm/s}} \quad \text{oder} \quad W_{mech.} = 0,98 \cdot K \cdot v \cdot 10^{-4} \frac{\text{Ws}}{\text{gcm}}. \quad (9)$$

In Gleichung (38) ist 10^4 hinzuzufügen.

Gl. (38) muß also heißen:

$$k = \frac{4}{n^2} \cdot \frac{v \cdot \mu}{\alpha \cdot q} \cdot \mu \cdot \left(\frac{w \cdot I - \frac{1}{2} \Sigma \mathfrak{F}_P \cdot l_P}{\delta \cdot \frac{\mu}{\mu_0} - \frac{1}{\alpha}} \right)^2 \cdot 10^4 \frac{\text{cm g}}{\text{Ws}}. \quad (38)$$



Multiflex - Galvanometer

Empfindlich wie ein Spiegelgalvanometer — ab $5 \cdot 10^{-11}$ A —. Einfach im Gebrauch wie ein Zeigerinstrument. Verschiedene Systeme von 20-6000 Ohm. Austauschbare Lichtzeigerskalen mit parallaxenfreier Ablesung. Skalenbeleuchtung umschaltbar für Netz- und Batterieanschluß. **Zusatzgeräte:** Photographische Registriereinrichtung. Photoelektrischer Nachlaufsreiber. Photoelektrische Schaltkontakte.

Verlangen Sie unsere neue Liste 18/AE

SPEZIALFABRIK LICHTELEKTR. ZELLEN UND APPARATE

DR. B. LANGE

BERLIN - ZEHLENDORF - HERMANNSTRASSE 14-18



Leybold

Vakuum-Taschenbuch

Herausgegeben von K. DIELS und R. JAECKEL

Mit 233 Abbildungen im Text und auf einer Tafel. VIII, 270 Seiten Gr.-8°. 1958.

Ganzleinen DM 39,—

SPRINGER-VERLAG

BERLIN • GÖTTINGEN • HEIDELBERG

OCELIT-VARISTOREN

spannungsabhängige Widerstände
für Funkenlöschung und
Funkentstörung (UKW+Fernsehbereich)



C. CONRADTY NÜRNBERG

Elektroden, elektrische und galvanische Kohlen

Enzyklopädie der Energiewirtschaft

Herausgegeben von Dr.-Ing. Dr. jur. MAX WOLF. In 5 Bänden

Zweiter Band: Belastungskurven und Dauerlinien in der elektrischen Energiewirtschaft

Von Dr.-Ing. Dr. jur. MAX WOLF, Technisches Vorstandsmitglied der Wirtschaftsberatung AG, Düsseldorf, und Dr.-Ing. HELLMUTH JUNGE, Abteilungsleiter der Wirtschaftsberatung AG, Düsseldorf.

Mit 473 Abbildungen im Text und auf 2 farbigen Tafeln, 88 Zahlentafeln und 3 Formeltafeln sowie einem Anhang mit 12 Nomogrammen und 44 Zahlentafeln. XXVIII, 563 Seiten Gr.-8°. 1959. Ganzleinen DM 97,50

INHALTSÜBERSICHT:

Begriff der Belastungskurve und ihre zeichnerische Darstellung · Die tatsächlichen Belastungskurven der Wirkbelastung · Die normalisierten Kurven der Wirkbelastung · Die Beziehungen zwischen Wirk-, Blind- und Scheinleistung und $\cos \varphi$ · Die tatsächlichen Kurven der Blind- und Scheinleistung · Ableitung von Näherungsbeziehungen zwischen den Augenblickswerten der Wirk- und Blindleistung zur Aufstellung von normalisierten Kurven der Blind- und Scheinleistung · Mathematische Instrumente und Methoden zur Bestimmung des Inhalts einer Belastungskurve sowie der Energieinhalts- und Arbeitssummenlinien · Maschinelle und apparative Hilfsmittel zur Ermittlung von Dauerlinien und zur Durchführung energiewirtschaftlicher Untersuchungen · Die Ausgleichsprobleme · Überlagerungen von Dauerlinien mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Verfahren von Kuusinen · Weitere Darstellungsarten der Belastung · Die Analyse von Belastungskurven · Die Synthese von Belastungskurven · Dauer- und Häufigkeitslinien für Lufttemperatur, Wärme, Wind und Wasser · Anhang: Nomogramme · Zahlentafeln zu den symbolischen Kurven · Verzeichnis der Tagesbelastungskurven · Namenverzeichnis · Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG